MATH

Familles sommables

Exercices 32

Théorème de Fubini - termes positifs

1 ☆☆☆ ♥

Montrer que la famille $\left(\dfrac{i^j}{e^{2i}\, j!}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer $\sum\limits_{i,j\in\mathbb{N}} \dfrac{i^j}{e^{2i}\, j!}$.

2 ★☆☆ ♡

Soit $A = \{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ k \geqslant n\}$. Trouver, de deux manières différentes, une CNS sur $\alpha\in\mathbb{R}$ pour que :

$$\sum_{(n,k)\in A} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty.$$

3 ★★☆ Ⓐ

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ et $b_n = \dfrac{n}{2^n}$.

1. À l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que $\sum a_n$ converge et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.
3. En déduire la valeur de $\sum\limits_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \dfrac{mn^2}{2^n(n2^m + m2^n)}$.

Sommation par paquets - termes positifs

4 ☆☆☆ ♥

Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(i+j)^3}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

5 ☆☆☆ Ⓐ **TPE-EIVP MP 15**

Montrer que la série double $\sum\limits_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \dfrac{1}{(p+q)^2}$ diverge. Qu'en est-il de $\sum\limits_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \dfrac{1}{p^2+q^2}$?

6 ★☆☆ ♥

Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{\max(i,j)^3}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et montrer que $\sum\limits_{i,j\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\max(i,j)^3} = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3}$.

7 ★★★ ✍

Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{ij(i+j-1)}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculer $\sum\limits_{i,j\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{ij(i+j-1)}$.

8 ★★☆ Ⓐ ♡

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite formée des entiers naturels non nuls, ne contenant pas le chiffre 1 dans leur écriture en base 10, et rangés par ordre croissant.

Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

9 ★★☆ Ⓐ ♥

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

10 ★★☆ Mines-Ponts MP 15

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$. Trouver le domaine de définition de la fonction réelle f et déterminer son expression.

11 ★★☆ Ⓐ Mines-Telecom MP 21

Existence et calcul de $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$.

Familles sommables

12 ☆☆☆ ♥

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Étudier la sommabilité de $\left(\frac{1}{\sigma(n)}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)$.

13 ☆☆☆

Soit $x \in \mathbb{C}$. Étudier la sommabilité de la famille $\left(x^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ et calculer, lorsque c'est possible, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{|n|}$.

14 ☆☆☆ Ⓐ ♡

Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une famille sommable de nombres complexes de somme a.
Pour tout $(n,p) \in I = \{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p \leqslant n\}$, on pose $u_{n,p} = \frac{pa_p}{n(n+1)}$.
Montrer que $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

15 ☆☆☆ ♥

Étudier la sommabilité de $(x)_{x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$.

16 ☆☆☆

Soit $z \in \mathbb{C}$. Étudier la sommabilité de $(z^{i^2})_{i\in\mathbb{Z}}$.

17 ☆☆☆ ♥

Soit $z \in \mathbb{C}$. Étudier la sommabilité de $(z^{i+j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$.

18 ☆☆☆ Ⓐ

Soit $z \in \mathbb{C}$. Étudier la sommabilité de $(z^{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

19 ★☆☆ ♥

Calculer, si elle existe : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

20 ★★☆

Exprimer, si elle existe, $\sum_{\substack{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ i\leqslant j}} \frac{(-1)^i}{j^3}$ à l'aide de $\zeta(3)$.

21 ★☆☆ Ⓐ ♥ CCinP MP 24

On pose, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln(x))^p \,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de $a_{n,p}$ et calculer son expression.
2. On considère $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n,p}}$. Justifier son existence et calculer sa valeur.
3. La famille $\left(\frac{1}{a_{n,p}}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

22 ★★☆ ✍

On pose, pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $u_{n,p} = \begin{cases} \frac{1}{n^2-p^2} & \text{si } n \neq p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_{n,p}$ converge puis que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \frac{3}{4p^2}$.
2. Calculer $\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$. La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est-elle sommable ?

23 ☆☆☆ Ⓐ ♡ Extrait Centrale MP 23

Soit $x \in \left]-1\,,1\right[$. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

24 ★★★ ENS MP 23

On rappelle que, si on nomme γ la constante d'Euler, définie par $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)} \right\rfloor = \gamma$.

25 ★★★ Produit de convolution ENS MP 22

Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux familles de complexes sommables. On pose $\|a\|_1 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(a \star b)_n = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$.

1. Montrer que $a \star b$ est bien définie, sommable et que $\|a \star b\|_1 \leqslant \|a\|_1 \|b\|_1$.
2. (MP) Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ sommable. On pose, pour $z \in \mathbb{U}$, $F_a(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$. Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{U}$.
3. Montrer qu'il existe $e \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que, pour tout famille sommable $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $a \star e = e \star a = a$.
4. (MP) Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille à support fini et à valeurs complexes telle que F_a ne s'annule jamais sur $\mathbb{U}$. Montrer que a est inversible pour $\star$.
5. On pose $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, $a_n = 0$. Montrer que a est un élément de $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ non inversible pour $\star$.

Produit de Cauchy

26 ☆☆☆ ♡

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$, $|a| < 1$ et $|b| < 1$.

1. Montrer que le produit de Cauchy de $\sum a^n$ par elle-même est bien défini. Quelle égalité en découle ?
2. Montrer que $\dfrac{a-b}{(1-a)(1-b)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a^{n+1} - b^{n+1})$.

27 ★☆☆ ♥

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^{2k-n}}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. À l'aide d'un produit de Cauchy, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

28 ★☆☆ Ⓐ ♥

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$.

29 ★★☆ Ⓐ ♡ Mines-Ponts MP 24

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Établir : $\mathrm{e} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(x+n)\cdot n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

30 ★★☆ Binôme négatif ♡

Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $p \in \mathbb{N}$. Établir : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{n+p}{n} z^n = \dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

Indications

3 3. Exprimer la somme à l'aide de a_n et a_m puis utiliser la (di)symétrie des indices de la somme.

5 Comparer les deux TG.

6 $(\mathbb{N}^*)^2 = \{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ i < j\} \cup \{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ i > j\} \cup \{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ i = j\})$.

7 Sommation par paquets : $(\{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ i + j = k\})_{k \in [\![2,+\infty[\![}$. Puis DES et Fubini positif.

8 Poser $I_p = \{n \in \mathbb{N},\ 10^{p-1} \leqslant n < 10^p \text{ et } \exists k \in \mathbb{N},\ n = a_k\}$.

9 Remarquer que le terme général de la série s'annule souvent, et ne retenir que les termes non nuls comme un « paquet ».

10 En sup, on pourra admettre (ou démontrer...) : $\forall x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

11 Utiliser $I_p = \{n \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor \sqrt{n} \rfloor = p\}$.

14 Fubini en sommant à p fixé.

18 Distinguer $|z| \geqslant 1$ et $|z| < 1$.

21 1. En sup, comprendre la question de la façon suivante : montrer que la limite de $\int_X^1 x^n (\ln(x))^p \, dx$ quand $X \to 0^+$ est finie ; on notera $a_{n,p}$ sa valeur par la suite.

22 1. DES et changements d'indice. 2. Utiliser la symétrie des rôles de n et p.

23 Justifier que $(x^{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculer sa somme de deux façons différentes.

28 Somme de termes positifs...

29 Observer un produit de Cauchy.

30 Récurrence.

Solutions

1 - solution La famille étant à termes positifs, le calcul validera la sommabilité. D'après le théorème de Fubini positif :

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \frac{i^j}{\mathrm{e}^{2i}\, j!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{2i}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i^j}{j!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{2i}}\,\mathrm{e}^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

Et comme cette valeur est finie, la famille est sommable.

2 - solution La famille étant à termes positifs, le calcul validera la sommabilité.

M1 D'après le théorème de Fubini positif : $S = \sum\limits_{(n,k)\in A} \frac{1}{k^\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sum\limits_{n=1}^{k} 1 = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$.
S est donc la somme d'une série de Riemann. S CV ***ssi*** $\alpha - 1 > 1$ *i.e.* $\alpha > 2$.

M2 D'après le théorème de Fubini positif : $S = \sum\limits_{(n,k)\in A} \frac{1}{k^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

On observe ici le reste d'une série : $R_{n-1} = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Par comparaison série-intégrale classique (démo de la convergence des séries de Riemann) : $R_{n-1} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Ainsi, $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n$ est la somme d'une série convergente ***ssi*** $\alpha - 1 > 1$ *i.e.* $\alpha > 2$.

3 - solution

1. Posons $u_n = v_n = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les séries de termes généraux u_n et v_n convergent absolument de sorte que leur produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et qu'on peut écrire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.
Or, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} = a_n$.
Le résultat précédent permet donc d'affirmer que $\sum a_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4$.
2. Par linéarité, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(b_n + \frac{1}{2^n}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n + 2$. Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = 2$.
3. On observe que $\frac{mn^2}{2^n(n2^m+m2^n)} = \frac{b_n^2 b_m}{b_n+b_m}$. Et comme les termes sont positifs, on peut faire le calcul :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^2 b_m}{b_n+b_m} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_n^2 b_m}{b_n+b_m} \quad \text{(Fubini positif)} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^2 b_m}{b_n+b_m}. \quad \text{(changement d'indice)} \end{aligned}$$

Sommation terme à terme des deux dernières relations :

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_n^2 b_m}{b_n+b_m} + \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^2 b_m}{b_n+b_m} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{b_n^2 b_m}{b_n+b_m} + \frac{b_n^2 b_m}{b_n+b_m}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} b_n b_m \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m\right) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Donc $S = 2$.

4 - solution La famille $\left(\frac{1}{(i+j)^3}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est à termes positifs, le calcul permettra de conclure quant à la sommabilité.
Paquets classiques : $(\mathbb{N}^*)^2$ admet pour recouvrement disjoint $(I_n)_{n\in[\![2,+\infty[\![}$ où $I_n=\{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ i+j=n\}$.
Sommation par paquets : $S=\sum\limits_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(i+j)^3}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\sum\limits_{(i,j)\in I_n}\frac{1}{(i+j)^3}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\sum\limits_{(i,j)\in I_n}\frac{1}{n^3}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3}|I_n|=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3}(n-1)$.
Or, $\frac{n-1}{n^3}\sim\frac{1}{n^2}$, TGSCV (Riemann avec $\alpha=2>1$), donc la somme est finie. Ainsi, la famille est sommable.
On obtient d'ailleurs $S=\zeta(2)-\zeta(3)$.

5 - solution ➢ Somme de termes positifs, le calcul validera ou invalidera la sommabilité. De plus, le théorème de sommation par paquets avec le recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$ classique $(\{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ i+j=n\})_{n\in[\![2,+\infty[\![}$ s'applique :

$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(p+q)^2}=\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p+q=n}\frac{1}{(p+q)^2}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n^2}=+\infty$$

car $\frac{n-1}{n^2}\sim\frac{1}{n}$ est le TG d'une SATPDV.

➢ Comme $\forall(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $(p+q)^2=p^2+q^2+2pq>p^2+q^2$, on a $\frac{1}{p^2+q^2}>\frac{1}{(p+q)^2}$.
Par croissance des sommes de familles de réels positifs, $\sum\limits_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{p^2+q^2}\geqslant\sum\limits_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(p+q)^2}=+\infty$. Donc $\sum\frac{1}{p^2+q^2}$ DV.

6 - solution La famille est à termes positifs, le calcul de la somme validera la sommabilité ; et on peut faire le calcul par sommation par paquets en utilisant le recouvrement de $(\mathbb{N}^*)^2$: $(\{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ i<j\},\{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ i>j\},\{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ i=j\})$:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\max(i,j)^3}\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^3}+\sum_{1\leqslant i<j}\frac{1}{j^3}+\sum_{1\leqslant j<i}\frac{1}{i^3}\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^3}+2\sum_{1\leqslant i<j}\frac{1}{j^3}\quad\text{en effectuant le changement d'indice } (i,j)\mapsto(j,i) \text{ dans la dernière somme.}\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Fubini positif : $\sum\limits_{1\leqslant i<j}\frac{1}{j^3}=\sum\limits_{j=2}^{+\infty}\sum\limits_{i=1}^{j-1}\frac{1}{j^3}=\sum\limits_{j=2}^{+\infty}\frac{j-1}{j^3}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\frac{j-1}{j^3}$.
Ainsi, $S=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^3}+2\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\frac{j-1}{j^3}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{1+2(i-1)}{i^3}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{i^2}-\frac{1}{i^3}\right)$.
Comme $\frac{1}{i^2}$ et $\frac{1}{i^3}$ sont des termes généraux de séries positives convergentes, la famille $(\frac{2}{i^2}-\frac{1}{i^3})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est sommable donc on peut utiliser la linéarité : $S=2\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}-\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^3}$.
Ce résultat étant fini, la famille est sommable.

7 - solution $\left(\frac{1}{ij(i+j-1)}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est à valeurs réelles positives, le calcul de la somme validera la sommabilité, et on fait donc le calcul en sommant par parquets *via* le recouvrement disjoint $(\{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ i+j=k\})_{k\in[\![2,+\infty[\![}$:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{ij(i+j-1)}\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}^*\\ i+j=k}}\frac{1}{ij(k-1)}\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i(k-i)}.\end{aligned}$$

Or, DES : $\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i(k-i)}=\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{k-i}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}+\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{1}{k-i}\right)$.

Or, en posant $j=k-i$, on a $\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{1}{k-i}=\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}$. Donc $\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i(k-i)}=\frac{2}{k}\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}$. On reprend la somme initiale :

$$\begin{aligned}
S &= 2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}\\
&= 2\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{ik(k-1)}\\
&= 2\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}\sum_{k=i+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)}\\
&= 2\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}\sum_{k=i+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\
&= 2\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}\\
&= \frac{\pi^2}{3}.
\end{aligned}$$

Et la famille est sommable.

8 - solution $\sum\frac{1}{a_n}$ est une série à termes positifs, donc une majoration de la somme permet de valider la convergence de la série.
Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_p=\{n\in\mathbb{N}^*,\ 10^{p-1}\leqslant n<10^p \text{ et } \exists k\in\mathbb{N},\ n=a_k\}=\{\underline{\alpha_{p-1}\cdots\alpha_0}_{10},\ \forall k\in[\![0\,,p-1]\!]\,,\ \alpha_k\in[\![2\,,9]\!] \text{ et } \alpha_{p-1}\neq 0\}.$$

$(I_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^*$, donc par théorème de sommation par paquets : $S=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a_n}=\sum\limits_{p\in\mathbb{N}^*}\sum\limits_{n\in I_p}\frac{1}{a_n}$.
Or, pour $p\in\mathbb{N}^*$, on a $\forall n\in I_p$, $n\geqslant 10^{p-1}$ donc $\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{10^{p-1}}$. Par croissance des sommes de réels positifs :

$$S\leqslant\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in I_p}\frac{1}{10^{p-1}}\leqslant\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{10^{p-1}}\sum_{n\in I_p}1\leqslant\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{10^{p-1}}|I_p|\leqslant 8\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{9}{10}\right)^{p-1}\leqslant 72<+\infty.$$

Donc $\sum\frac{1}{a_n}$ converge.

9 - solution Notons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.
En tant que somme de termes positifs, $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ existe dans $[0\,,+\infty]$.
On observe que si $n+1$ n'est pas le carré d'un entier, alors $u_n=0$. On introduit alors $I=\{k^2-1,\ k\in[\![2\,,+\infty[\![\}$. $(I,\mathbb{N}^*\setminus I)$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^*$, de sorte que le théorème de sommation par paquets permet d'écrire :

$$S=\sum_{n\in I}u_n+\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus I}\underbrace{u_n}_{=0}=\sum_{n\in I}u_n=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lfloor\sqrt{k^2}\rfloor-\lfloor\sqrt{k^2-1}\rfloor}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}.$$

Or, $\frac{1}{k^2-1}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k^2}$, TGSCV ; donc cette dernière somme est la somme d'une série convergente.
On peut la calculer en observant la limite des sommes partielles. DES : $\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$.
Pour $N\in[\![2\,,+\infty[\![$, par télescopage : $S_N=\sum\limits_{k=2}^{N}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{3}{4}$.
Bilan : $S=\frac{3}{4}$.

10 - solution ➢ Pour $x\geqslant 0$, $f(x)$ est définie dans $[0\,,+\infty]$ et, par sommation par paquets :

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1}x^p=\sum_{p=0}^{+\infty}(2p+1)x^p=2x\sum_{p=1}^{+\infty}px^{p-1}+\sum_{p=0}^{+\infty}x^p.$$

On en déduit que si $x\geqslant 1$, $f(x)=+\infty$ et si $x\in[0\,,1[$, $f(x)=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}$.

- Le calcul précédent pour $x \in]-1\,,0[$ est encore valable par sommabilité de la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si $x \leqslant -1$, la divergence grossière de la série assure que $f(x)$ n'est pas définie.

Bilan : f est définie sur $]-1\,,1[$ et $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$.

11 - solution S est une somme de réels positifs, elle existe dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

SPP : $I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ p+q^2 = n\}$, $|I_n| = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. On trouve $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)}$.

SPP : $J_p = \{n \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor\sqrt{n}\rfloor = p\} = \{n \in \mathbb{N}^*, p^2 \leqslant n \leqslant (p+1)^2 - 1\}$. On trouve, par télescopage :

$$S = \sum_{p=1}^{+\infty} p\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

12 - solution Par positivité des familles concernées, on peut sommer en permutant les termes :

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$;
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma(n)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

Donc $\left(\frac{1}{\sigma(n)}\right)$ n'est pas sommable et $\left(\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)$ est sommable.

13 - solution $(x^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable ***ssi*** $(|x|^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
Somme à termes positifs, $(\mathbb{Z}^{-*}, \{0\}, \mathbb{N}^*)$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{Z}$ donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x|^{|n|} = 1 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |x|^n\,,$$

qui est finie ***ssi*** $|x| < 1$. Ainsi, $(x^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable ***ssi*** $|x| < 1$.
Supposons $|x| < 1$. Par le théorème de sommation par paquets : $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x^{|n|} = 1 + 2\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x^n = 1 + 2\frac{1}{1-x} = \frac{3-x}{1-x}$.

14 - solution $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable ***ssi*** $(|u_{n,p}|)_{(n,p)\in I}$ est sommable.
Fubini positif : $\sum\limits_{(n,p)\in I} |u_{n,p}| = \sum\limits_{p=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=p}^{+\infty} \frac{p|a_p|}{n(n+1)} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} p\,|a_p| \sum\limits_{n=p}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} p\,|a_p|\,\frac{1}{p} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} |a_p| < +\infty$.
Ainsi, la famille est sommable et on reprend exactement la même démarche pour le calcul de la somme : $\sum\limits_{(n,p)\in I} u_{n,p} = a$.

15 - solution $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une sous-famille non sommable de $(x)_{x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ donc $(x)_{x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ n'est pas sommable.

16 - solution

- Si $|z| \geqslant 1$, $|z|^{i^2} \not\to 0$ donc $\sum\limits_{i\geqslant 0} |z|^{i^2}$ diverge. Donc la famille $(z^{i^2})_{i\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable, et $(z^{i^2})_{i\in\mathbb{Z}}$ *a fortiori* non plus.
- Si $|z| < 1$, $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |z|^{i^2} = 1 + \sum\limits_{i<0} |z|^{i^2} + \sum\limits_{i>0} |z|^{i^2} = 1 + 2\sum\limits_{i>0} |z|^{i^2}$. Or, pour $i \geqslant 1$, $i^2 \geqslant i$ donc $|z|^{i^2} \leqslant |z|^i$. Or, $\sum |z|^i$ converge, donc $\sum\limits_{i>0} |z|^{i^2}$ aussi. Donc la famille est sommable.

La famille est donc sommable ***ssi*** $|z| < 1$.

17 - solution Fubini positif, indices séparés : $S = \sum\limits_{i,j\geqslant 0} \left|z^{i+j}\right| = \sum\limits_{i,j\geqslant 0} |z|^i|z|^j = \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} |z|^i\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} |z|^j\right) = \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} |z|^i\right)^2$.

- Si $|z| \geqslant 1$, $\sum |z|^i$ diverge donc $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} |z|^i = +\infty$ et $S = +\infty$.
- Si $|z| < 1$, $S = \frac{1}{1-|z|} < +\infty$.

Donc $(z^{i+j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable ***ssi*** $|z| < 1$.

18 - solution Fubini positif : $S = \sum\limits_{i,j\geqslant 1} \left|z^{ij}\right| = \sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \left(|z|^i\right)^j$.

- Si $|z| \geqslant 1$, $|z|^i$ est le TG d'une série divergente donc $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \left(|z|^i\right)^j = +\infty$, donc $S = +\infty$.

➢ Si $|z| < 1$, $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \left(|z|^i\right)^j = \frac{|z|^i}{1-|z|^i} \sim i{+}\infty |z|^i$, TGSCV. Donc la famille est sommable.

Ainsi, la famille est sommable ***ssi*** $|z| < 1$.

19 - solution Sous réserve de sommabilité de $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{k(k+1)n}\right)_{1 \leqslant n \leqslant k}$, on peut écrire, d'après le théorème de Fubini :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Et la famille est bien sommable, puisqu'en reprenant les calculs sur les valeurs absolues :

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant k}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{k(k+1)n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

20 - solution Sous réserve de sommabilité :

$$S = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{j} \frac{(-1)^i}{j^3} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^3} \sum_{i=1}^{j} (-1)^i = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^j}{j^3} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^3} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j^3} \right).$$

On repère $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^3} = \zeta(3)$.

On décompose classiquement (termes de rangs pairs et impairs) : $\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j^3} = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(2i)^3} - \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)^3} \\ \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^3} = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(2i)^3} + \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)^3} \end{cases}$

Donc $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j^3} = \frac{1}{8}\zeta(3) - \left(\zeta(3) - \frac{1}{8}\zeta(3)\right) = -\frac{3}{4}\zeta(3)$.
Bref, $S = -\frac{1}{2}\left(\zeta(3) + \frac{3}{4}\zeta(3)\right) = -\frac{7}{8}\zeta(3)$.
Justifions la sommabilité. $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \sum\limits_{i=1}^{j} \left|\frac{(-1)^i}{j^3}\right| = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^3} \sum\limits_{i=1}^{j} 1 = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} < +\infty$, donc la famille est sommable et les calculs précédents sont rendus licites.

21 - solution 1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

➢ *Rédaction spé.* IPP convergente en posant $u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v(x) = (\ln(x))^p$, qui sont bien $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,,1]$ et telles que $u(x)v(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$: $a_{n,p} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln(x))^p\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}(\ln(x))^{p-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{p}{n+1} a_{n,p-1}$. Récurrence élémentaire sur p : $a_{n,p} = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^p} a_{n,0} = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}$.

➢ *Rédaction sup.* On fait la même chose sur $\int_X^1 x^n (\ln(x))^p\,\mathrm{d}x$, avec $X \in \,]0\,,1[$ fixé ; puis en faisant tendre X vers 0, on obtient le résultat.

2. $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n,p}} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(n+1)^{p+1}}{p!} = (n+1)\,\mathrm{e}^{-(n+1)}$ après avoir reconnu une somme de série exponentielle, ce qui justifie son existence. Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n,p}} = \mathrm{e}^{-1} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n-1}$.

➢ *Rédaction spé.* On repère alors une série géométrique dérivée de raison e^{-1} avec $\left|\mathrm{e}^{-1}\right| < 1$, donc la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n,p}}$ existe et vaut $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{(1-\mathrm{e}^{-1})^2}$.

➢ *Rédaction sup.* Ben... Faut prouver ce qui a été annoncé. On peut le faire avec un produit de Cauchy (vu en exercice) ; ou par une étude de fonction.
Posons $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$. Fonction dérivable sur $]-1\,,1[$, de dérivée $f'(x) = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
Le terme de gauche admet pour limite $\frac{1}{(1-x)^2}$ quand $n \to +\infty$. D'où $\sum kx^{k-1}$ converge et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

3. Par l'absurde, si la famille $\left(\frac{1}{a_{n,p}}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, la sous-famille $\left(\frac{1}{a_{n,0}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi, ce qui n'est pas le cas...

22 - solution 1. À partir du rang $p+1$, $u_{n,p}$ est positif et $u_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison de série à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_{n,p}$ converge.

DES : si $n \neq p$, $u_{n,p} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$. Alors, si $N > 2p$:

$$\begin{aligned} 2p\sum_{n=1}^{N} u_{n,p} &= \sum_{n=1}^{p-1}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) + \sum_{n=p+1}^{N}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{-k} - \sum_{k=p+1}^{2p-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k} - \sum_{k=2p+1}^{N+p}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{2p} - \sum_{n=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

$\sum\limits_{n=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k}$ est une somme de $2p$ termes de limite nulle. p étant fixé, $\sum\limits_{n=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $2p\sum\limits_{n=1}^{N} u_{n,p} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2p}$, donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \frac{3}{4p^2}$.

2. Commençons par calculer les deux sommes.
   - D'après la question 1 : $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
   - On observe que $u_{p,n} = -u_{n,p}$, de sorte que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{p,n} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -u_{n,p} = -\frac{\pi^2}{8}$ d'après la question précédente.

   On en déduit en particulier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \neq \sum\limits_{p=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$.
   La contraposée du théorème de Fubini entraîne que $(u_{n,p})_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

23 - solution On sait que $(x^{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. Sa somme vaut $S = \sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}(x^i)^j = \sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{x^i}{1-x^i}$.
Par ailleurs, sommation par paquets $I_n = \{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ ij = n\}$, qui est de cardinal $d(n)$:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(i,j)\in I_n} x^{ij} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n.$$

24 - solution À faire.

25 - solution 1. $a \in \ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$, donc :
   - $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < +\infty$ donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ converge, et *a fortiori* $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;
   - $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^-} |a_n| \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < +\infty$ donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_{-n}|$ converge, et *a fortiori* $a_n \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

   On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée. En outre, par symétrie des hypothèses faites sur a et b, toutes ces remarques sont valables pour b. On peut donc introduire $\|b\|_\infty = \inf\{|b_n|,\ n\in\mathbb{Z}\}$. On a $\forall n\in\mathbb{Z}$, $|b_n| \leqslant \|b\|_\infty$.
   Par inégalité triangulaire, on a alors : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|(a\star b)_n| \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |a_k||b_{n-k}| \leqslant \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\|b\|_\infty \leqslant \|b\|_\infty\|a\|_1 < +\infty$. Donc $(a\star b)_n$ est un complexe bien défini en tant que somme d'une famille sommable.
   Ensuite, on vérifie que $a\star b \in \ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(a\star b)_n| &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k||b_{n-k}| \quad \text{par inégalité triangulaire,} \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_{n-k}| \quad \text{d'après le théorème de Fubini positif,} \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| \sum_{p\in\mathbb{Z}} |b_p| \quad \text{par changement d'indice,} \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\|b\|_1 \\ &\leqslant \|a\|_1\|b\|_1. \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $a \star b \in \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ et $\|a \star b\|_1 \leqslant \|a\|_1 \|b\|_1$.

2. MP.
3. $e = \mathbb{1}_{\{0\}}$ convient.
4. MP.
5. a appartient clairement à $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Supposons, par l'absurde que a soit inversible et notons $b \in \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ son inverse. Alors $(a \star b)_n = b_n - b_{n-1}$.
   - Pour $n > 0$, il vient $b_n = b_0$. Mais comme b est sommable, $b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $b_0 = 0$.
   - Pour $n = 0$, il vient $b_0 - b_{-1} = 1$, donc $b - 1 = 1$.
   - Pour $n < 0$, il vient $b_n = b\_1 = 1$ ce qui contredit la sommabilité de b.

   Donc a n'est pas inversible.

26 - solution

1. $\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n$.
2. PdC : $\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.

27 - solution

1. $0 \leqslant u_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!} \leqslant 2^{-n} \mathrm{e}^4$. Or, $\sum 2^{-n}$ CV, donc $\sum u_n$ CV par critère de comparaison des séries à termes positifs.
2. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \frac{1}{2^{n-k}}$ est le terme général du produit de Cauchy de $\sum \frac{2^k}{k!}$ par $\sum \frac{1}{2^k}$, qui CV Abs (on retouve la CV Abs), donc : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \mathrm{e}^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2\,\mathrm{e}^2$.

28 - solution Notons $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. u_n est le terme général du produit de Cauchy de la série $\sum a_n$ par elle-même. Comme $a_n \geqslant 0$, on peut faire le calcul dans $[0\,, +\infty]$: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right)^2$. Ce résultat est fini ***ssi*** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \infty$, *i.e.* $\alpha > 1$.

29 - solution Notons $S = \mathrm{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n) \cdot n!}$. S est un réel puisque c'est la somme d'une série absolument convergente ; l'autre membre de l'égalité aussi...
On observe alors pour S un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes :

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n) \cdot n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \quad \text{en notant } w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{(-1)^k}{(x+k) \cdot k!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)}
\end{aligned}
$$

après avoir montré, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

30 - solution

- Absolue convergence par la règle de D'Alembert : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n+p+1}{n+1} |z| \to |z| < 1$ donc la série CV Abs.
- Preuve de la formule par récurrence sur p.
  - *Initialisation.* Pour $p = 0$, la formule est évidente.
  - *Hérédité.* Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^p}$. Montrons $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

    Or :
$$
\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \frac{1}{1-z} \frac{1}{(1-z)^p} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} z^n \right).
$$

Produit de deux séries Abs CV selon précédemment, donc le produit de Cauchy est défini, dont le terme général se simplifie classiquement :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{p-1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{k+p}{p} - \binom{k+p-1}{p} \right) = \binom{n+p}{p} = \binom{n+p}{n}.$$

D'où le résultat.