

Nature d'une série numérique explicite

1 ☆☆☆

Nature de la série de terme général e^{4-5n} .

2 ☆☆☆ ♥

Nature de la série de terme général $\frac{\sin(n^2)}{n^2}$.

3 ☆☆☆ ♥

Nature de la série de terme général $\frac{1}{n \cos^2(n)}$.

4 ☆☆☆ ♥

Nature de la série de terme général $2^{(-1)^n n}$.

5 ☆☆☆ ♥

Nature de $\sum \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}$.

6 ★☆☆ ♥

Nature de la série de terme général $\frac{1}{\left(\frac{2n}{n}\right)}$.

7 ☆☆☆

Nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{(n-1)(n+3)}{n(n+1)}\right)$.

15 ★☆☆ CCinP PC

Discuter selon les valeurs du paramètre réel α de la nature de la série de terme général $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^\alpha}$.

16 ★☆☆ CCinP PC

Déterminer la nature des séries de termes généraux : $u_n = \sqrt{1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^{2/5}}} - 1$ et $v_n = (-1)^n \left(\sqrt{1 + \frac{\ln(n)}{n^{2/5}}} - 1\right)$.

8 ★☆☆

Nature de la série de terme général $\frac{(\sqrt{n} + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(n-2i) \ln(n)}$.

9 ★☆☆ CCinP PC

Nature de la série de terme général $\exp(-\ln^2(\ln(n)))$.

10 ★☆☆ CCinP PC

Nature de la série de terme général $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

11 ★☆☆ CCinP PC

Nature de la série de terme général $\frac{n^{\ln(n)}}{n!}$.

12 ☆☆☆ ♥

Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.

13 ☆☆☆ Mines-Telecom MP 19

Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

14 ★☆☆ CCinP PSI 24

Nature de $\sum \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

Nature d'une série numérique - Exercices abstraits

17 ☆☆☆ ♥

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.

1. Montrer que, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
2. Montrer que, si $\sum u_n$ diverge et si (u_n) est majorée, alors $\sum v_n$ diverge.
3. Trouver un exemple de suite (u_n) pour laquelle $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.

18 ★☆☆ CCinP PC

On considère une série $\sum u_n$ convergente, et à termes positifs. Étudier la convergence de la série $\sum \sqrt{u_n u_{2n}}$.

Nature d'une série numérique - TG non explicite

19 ★☆☆ ♥ Centrale MP 15

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0, \pi]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \cos u_n$.

1. Montrer que (u_n) converge vers 0.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

20 ★☆☆ ♥ Centrale PSI 17

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier qu'il existe un unique réel a_n tel que $e^{a_n} + na_n = 2$.
2. Nature des séries $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$?
3. $\lim n(1 - na_n)$.

21 ★★★

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive. On pose $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$.

1. Montrer que la suite u est bien définie et croissante.
2. Montrer que (u_n) converge **ssi** $\sum a_n$ converge.

Comparaison suite - série

22 ★☆☆ ♥ Mines-Ponts PC

1. *Règle de Raabe et Duhamel.* Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive pour laquelle il existe deux constantes réelles α et β telles que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^\alpha u_n$ et $t_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$.

- (a) Montrer que la série de terme général t_n converge.
 - (b) En déduire qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\sqrt{n!} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Comparaison série - intégrale

23 ★☆☆ ⊕

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2 + 1}$.

Déterminer un équivalent de son reste d'ordre n .

24 ★☆☆ ♥ Séries de Bertrand

On pose, pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

1. Étudier la nature de $\sum u_n$ dans les cas suivants :
 (a) $\alpha < 1$ (et β quelconque) ; (b) $\alpha > 1$ (et β quelconque) ; (c) $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$.
Désormais, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.
2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, étudier la nature de $\sum u_n$ dans le cas où $\beta = 1$.
3. Adapter la méthode précédente pour obtenir la nature de $\sum u_n$ dans le cas où $\beta \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$.

Calcul de la somme d'une série convergente

25 ☆☆☆ ♥

Après avoir justifier l'existence, calculer : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$.

26 ★☆☆ ⊕ ♥ CCinP PC

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

27 ★☆☆ ⊕ ♣ ♥

Existence et signe de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-8)^n}{(2n)!\sqrt{n+1}}$.

28 ☆☆☆ ♥

1. Justifier que $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\sum \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ convergent.2. En déduire l'existence de : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$.

3. Calculer cette somme.

29 ★★★ ⊕

Existence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

30 ★☆☆ ♣ ♥

On considère la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.1. Montrer : $\forall n \geq 2, H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_{n-1}$.2. En déduire que (H_n) diverge, et que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = H_n - \ln(n)$ converge.
*On note γ cette limite, que l'on appelle constante d'Euler.*3. En déduire : $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.4. Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$.

31 ★☆☆

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Montrer qu'il existe un unique couple (a, b) , à déterminer, tel que la série de terme général u_n converge, puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

32 ★☆☆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$.2. En déduire l'existence et la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$.

33 ★★★ ♣ ♥ St Cyr MP 23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note r_n le reste de la division euclidienne de n par 5.1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{r_n}{n(n+1)}$ converge.2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{k(k+1)}$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une écriture de S_{5n} en fonction de termes de la suite $(H_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)}$.

Reste

34 ★★★ ♥

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$.1. Convergence de la série de terme général u_n .2. Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ et en déduire que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq u_n.$$

35 ★☆☆ ♥ CCinP PC

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et tend vers 0.
2. Soit $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$. Nature de $\sum_{n \geq 1} v_n$?
3. Soit $w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de $\sum_{n \geq 1} w_n$?
4. Donner la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

En route pour la spé

36 ★☆☆ ♥

Nommons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Justifier que la série mise en jeu est bien convergente.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. En exprimant $\frac{1}{2n+1}$ à l'aide d'une intégrale, montrer que $\sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + r_p$ où r_p est une intégrale à expliciter.
3. En déduire la valeur de S .

37 ★☆☆ ♥ Adaptation écrit CCinP MP 15

On définit, pour n entier naturel non nul et pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. On cherche à donner un sens à l'expression $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right)$.
 - (a) Soit $(n, X) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^{+*}$. Calculer $I_n(X) = \int_0^X f_n(x) dx$.
 - (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la fonction I_n ainsi définie admet une limite ℓ_n , à déterminer, quand X tend vers $+\infty$.
 - (c) Justifier que la série de terme général ℓ_n converge et calculer $\ell = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n$.
2. On cherche à présent à donner un sens à l'expression $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$.
 - (a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que la série de terme général $f_n(x)$ converge et calculer $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
 - (b) Soit $X \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculer $I(X) = \int_0^X S(x) dx$.
 - (c) Montrer que la fonction I ainsi définie admet une limite ℓ' , à déterminer, quand X tend vers $+\infty$.

Indications

9 Calculer la limite de $\sqrt{n} \exp(-\ln^2(\ln(n)))$.

11 *Idée 1.* Formule de Stirling et règle de Riemann. *Idée 2.* Règle de d'Alembert. *Idée 3.* u_n est « proche » de $\frac{z^n}{n!}$.

13  Le CSSA ne s'applique pas ! Utiliser plutôt un développement asymptotique...

14 DL.

15 Trouver un équivalent de $n^\alpha \ln \left(\frac{n+1}{n+3} \right)$ et distinguer les cas $\alpha = 1$, $\alpha > 1$, $\alpha < 1$.

16 Astuce 1 : former un DL₃ de u_n et v_n . Astuce 2 : CSSA, monotonie par étude de fonction.

18 $\sqrt{u_n u_{2n}} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{2n})$.

19 1. Suite $u_{n+1} = f(u_n)$. 2. Critère de D'Alembert.

20 1. Th de la bijection. 2. $a_n \sim ?$ 3. Développement asymptotique de a_n .

26 $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$.

27 Signe : $S = S_1 + R_1$ et utiliser l'encadrement du reste pour une série alternée.

28 3. Somme partielle : $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^N \frac{\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$, puis télescopage.

29 Sommes partielles de rang pair et impair; grouper les termes consécutifs; utiliser le développement asymptotique de la série harmonique.

30 1. CSI. 4. $\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n}$.

31 Développement asymptotique de u_n à la précision $\frac{1}{n^{3/2}}$.

33 2. Scinder la somme en 5 sommes selon la valeur de r_k et appliquer des DES. 3. Voir la question 2 comme la limite d'une suite extraite.

35 2. Bonus du CSSA. 3. Utiliser $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

Solutions

1 - solution $\sum e^{4-5n} = e^4 \sum (e^{-5})^n$ est une série géométrique convergente car $|e^{-5}| < 1$.

2 - solution $\left| \frac{\sin(n^2)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ CV. Par critère de comparaison à une série à termes positifs, $\sum \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ CV Abs.
A fortiori, $\sum \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ CV.

3 - solution $\frac{1}{n \cos^2(n)} \geq \frac{1}{n}$. Or, $\sum \frac{1}{n}$ est une SATP DV ; par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n \cos^2(n)}$ DV.

4 - solution $2^{(-1)^n n} \not\rightarrow 0$ donc la série DV (G).

5 - solution Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}$. On a : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n+1}{2n+1} \rightarrow 0$. D'après le théorème de D'Alembert, $\sum u_n$ CV.

6 - solution ➤ Idée 1. Stirling. $\frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{n!^2}{(2n)!} \sim \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$, TG d'une série CV. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série CV.

➤ Idée 2. Majorer. $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-2)\dots \times 4 \times 2}{n!} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots \times 3 \times 1}{n!} \geq 2^n$, donc $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or, $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ CV. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série CV.

➤ Idée 3. D'Alembert. $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n+1}{2(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} < 1$, donc $\sum u_n$ CV.

7 - solution $\ln \left(\frac{(n-1)(n+3)}{n(n+1)} \right) = \ln \left(1 + \underbrace{\frac{n-3}{n(n+1)}}_{\rightarrow 0} \right) \sim \frac{n-3}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n}$, TG d'une série à termes positifs DV. Par critère des séries à termes positifs, la série diverge.

8 - solution $|u_n| \sim \frac{\sqrt{n} \frac{1}{n}}{n \ln(n)} \sim \frac{1}{n^{3/2} \ln(n)} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Comme $\frac{3}{2} > 1$, $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ CV. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ CV Abs donc CV.

9 - solution Observons $\sqrt{n} \exp(-\ln^2(\ln(n))) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(n) - \ln^2(\ln(n))\right)$. En posant $X = \ln(n) \rightarrow +\infty$, on a $\frac{1}{2} \ln(n) - \ln^2(\ln(n)) = \frac{1}{2} X - \ln^2(X) \rightarrow +\infty$ par croissances comparées. Par composition, $\sqrt{n} \exp(-\ln^2(\ln(n))) \rightarrow +\infty$. Donc $\frac{1}{\sqrt{n} \exp(-\ln^2(\ln(n)))} \rightarrow 0$.

En d'autres termes, $\frac{1}{\sqrt{n}} = o(\exp(-\ln^2(\ln(n))))$. Or, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ DV, donc $\sum \exp(-\ln^2(\ln(n)))$ DV, par comparaison de séries à termes positifs.

10 - solution $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = (n+1)^{1/n} - n^{1/n} = n^{1/n} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/n} - 1 \right) = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \left(e^{\frac{1}{n} \ln(1+\frac{1}{n})} - 1 \right)$.

Or :

➤ $e^{\frac{\ln(n)}{n}} \sim 1$.

➤ $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Avec le DL usuel de l'exponentielle en 0 : $e^{\frac{1}{n} \ln(1+\frac{1}{n})} - 1 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, soit $e^{\frac{1}{n} \ln(1+\frac{1}{n})} - 1 \sim \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{1}{n^2}$. Par comparaison des séries à termes positifs, la série converge.

11 - solution On propose trois stratégies.



Formule de Stirling et règle de Riemann.

Stirling : $n^2 \frac{n^{\ln(n)}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp(2 \ln(n) + \ln^2(n) - n \ln(n) + n)$. Or, $2 \ln(n) + \ln^2(n) - n \ln(n) + n \sim -n \ln(n) \rightarrow -\infty$, donc $n^2 u_n \rightarrow 0$. Ainsi, $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum \frac{n^{\ln(n)}}{n!}$ par critère de comparaison de séries à termes positifs.



Règle de d'Alembert.

u_n ne s'annule jamais donc on peut calculer : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln(n)} (n+1)^{\ln(1+\frac{1}{n})-1} \rightarrow 0$. De fait, $\sum u_n$ CV.



Se rapprocher de l'expression $\frac{z^n}{n!}$.

Par croissances comparées, $\frac{\ln^2(n)}{n} \rightarrow 0$. Donc APCR, $\frac{\ln^2(n)}{n} \leq 1$, et *a fortiori* $\ln^2(n) \leq n$. D'où : $\frac{n^{\ln(n)}}{n!} = \frac{e^{\ln^2(n)}}{n!} \leq \frac{e^n}{n!}$. Or, $\sum \frac{e^n}{n!}$ CV (série exponentielle de paramètre e). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{n^{\ln(n)}}{n!}$ CV.

12 - solution $\frac{\ln(n)}{n}$ est le terme général d'une suite positive, décroissante et tendant vers 0. Donc $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ est une série alternée qui vérifie le CSSA, ce qui entraîne qu'elle converge.

13 - solution $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ TGSCV.

14 - solution $DL_4 : \ln\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Donc :

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On observe un terme général d'une série convergente par linéarité (le premier relève du critère spécial, le second des séries de Riemann).

15 - solution $u_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^\alpha} = \exp\left(n^\alpha \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right)\right)$. Notons $v_n = n^\alpha \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) = n^\alpha \ln\left(1 - \frac{2}{n+3}\right) \sim -2n^{\alpha-1}$.

- Si $\alpha = 1$, $v_n \rightarrow -2$, donc $u_n \rightarrow e^{-2} \neq 0$, donc $\sum u_n$ DV grossièrement.
- Si $\alpha < 1$, $v_n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 1 \neq 0$, donc $\sum u_n$ DV grossièrement également.
- Si $\alpha > 1$, $n^2 u_n = \exp(2 \ln(n) + v_n)$, et $2 \ln(n) = o(v_n)$ par croissances comparées. Donc $2 \ln(n) + v_n \sim v_n \rightarrow -\infty$ puis $n^2 u_n \rightarrow 0$. Ainsi, $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV, il en est de même de $\sum u_n$ par critère de comparaison des séries à termes positifs.

16 - solution On forme les développements asymptotiques :

$$\begin{aligned} \text{➤ } u_n &= \frac{1}{2}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^{2/5}} - \frac{1}{8} \frac{\ln^2(n)}{n^{4/5}} + \frac{1}{16}(-1)^n \frac{\ln^3(n)}{n^{6/5}} + o\left(\frac{\ln^3(n)}{n^{6/5}}\right). \\ \text{➤ } v_n &= \frac{1}{2}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^{2/5}} - \frac{1}{8}(-1)^n \frac{\ln^2(n)}{n^{4/5}} + \frac{1}{16}(-1)^n \frac{\ln^3(n)}{n^{6/5}} + o\left(\frac{\ln^3(n)}{n^{6/5}}\right). \end{aligned}$$

Or, $\left(\frac{\ln(n)}{n^{2/5}}\right)$ est décroissante APCR (étude de fonction) et tend vers 0. D'après le CSSA, $\sum \frac{1}{2}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^{2/5}}$ CV.

De plus, $\frac{\ln^3(n)}{n^{6/5}} = o\left(\frac{1}{n^{11/10}}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^{11/10}}$ CV, donc $\frac{1}{16}(-1)^n \frac{\ln^3(n)}{n^{6/5}}$ et $o\left(\frac{\ln^3(n)}{n^{6/5}}\right)$ sont les TG de séries qui CV Abs.

Enfin, $w_n = \frac{1}{8} \frac{\ln^2(n)}{n^{4/5}}$ est le TG d'une série qui CV (CSSA comme au premier point) mais qui ne CV pas Abs ($n^{4/5} w_n \rightarrow +\infty$, donc $\frac{1}{n^{4/5}} = o(w_n)$).

Bilan : $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ CV.

17 - solution 1. Si $\sum u_n$ converge, comme $0 \leq v_n \leq u_n$, $\sum v_n$ converge par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

2. Si $\sum u_n$ diverge et si (u_n) est bornée, alors $\exists B \in \mathbb{R}$, $|u_n| \leq B$, donc $v_n \geq \frac{u_n}{1+B^2}$ donc $\sum v_n$ diverge par le même théorème.

3. $(u_n) = (n^2)$ et $(u_n) = (2^n)$ conviennent.

Mais pas $(u_n) = (n)$... Question subsidiaire : caractériser les suites (u_n) pour lesquelles $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ CV.

18 - solution ➤ Commençons par montrer que $\sum u_{2n}$ CV, à l'aide des sommes partielles de cette série.

Comme $\sum u_n$ CV, la suite de ses sommes partielles est majorée, par la somme S de la série par exemple.

Notons alors $S'_N = \sum_{k=0}^N u_{2k} \leq \sum_{k=0}^{2N} u_k \leq S$. Donc la suite des sommes partielles de la série $\sum u_{2n}$, qui est à termes positif, est majorée, ce qui permet d'affirmer que $\sum u_{2n}$ CV.

- On a $\sqrt{u_n u_{2n}} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{2n})$. Par linéarité, $\frac{1}{2}(u_n + u_{2n})$ est le TG d'une série CV. Par critère de convergence des séries à termes positifs, il en est donc de même de $\sqrt{u_n u_{2n}}$.

19 - solution

- $[0, \pi]$ est stable par $1 - \cos$, donc la suite est bien définie à valeurs dans $[0, \pi]$. $1 - \cos$ croît sur $[0, \pi]$ (sa dérivée est $\sin$), donc (u_n) est monotone. $1 - \cos \leq \text{Id}_{[0, \pi]}$ donc $u_1 \leq u_0$ et (u_n) décroît ; étant minorée par 0, (u_n) converge.
- Le seul point fixe de $1 - \cos$ sur $[0, \pi]$ est 0, donc $u_n \rightarrow 0$. Alors $u_{n+1} \sim \frac{u_n^2}{2}$, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 0$: le critère de D'Alembert s'applique.

20 - solution

- Posons $f_n : x \mapsto e^x + nx - 2$. Par OA, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_n(x) = e^x + n > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $f_n(0) = -2 < 0$, $f_n(1) = n + e - 2 > 0$.
 - Si $x \leq 0$, $f_n(x) \leq f_n(0) < 0$, donc f_n ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^-$.
 - Si $x \geq 1$, $f_n(x) \geq f_n(1) > 0$ donc f_n ne s'annule pas non plus sur $[1, +\infty[$.
 - Sur $]0, 1[$, f_n est continue et strictement décroissante, elle réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $] -2, n + e - 2[$, qui contient 0. Donc f_n s'annule exactement une fois sur $]0, 1[$.
 Bilan : l'équation admet une unique solution réelle a_n sur $\mathbb{R}$, qui se trouve être dans $]0, 1[$.
- $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{1/n} - 1 \geq 0$ donc $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$, donc $a_n \rightarrow 0$. De fait, $na_n = 2 - e^{a_n} \rightarrow 1$, donc $a_n \sim \frac{1}{n}$. Donc $\sum a_n$ DV.
 $f_{n+1}(a_n) = e^{a_n} + na_n - 2 + a_n = a_n \geq 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$. Par stricte croissance de f_{n+1} , $a_n \geq a_{n+1}$ donc (a_n) décroît vers 0. CSSA : $\sum (-1)^n a_n$ CV.
- $na_n = 2 - e^{a_n} = 1 - a_n + o(a_n) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi, $1 - na_n \sim \frac{1}{n} \dots \lim n(1 - na_n) = 1$.

21 - solution

- Par récurrence, u est bien définie dans $\mathbb{R}^{+*}$. Et donc u est croissante.
- $\Rightarrow$ Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $\ell > 0$. Donc $\frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{\ell} > 0$. APCR, $\frac{1}{u_n} > \frac{1}{2\ell}$, donc $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{u_n} > \frac{1}{2\ell} a_n$. Télescopage :
 $a_N - a_0 > \frac{1}{2\ell} \sum_{n=0}^{N-1} a_n$. Série positive majorée donc CV.
- $\Leftarrow$ $u_n \geq u_0 > 0$, donc $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{u_0}$, donc $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \leq \frac{1}{u_0} a_n$. Télescopage : $u_N - u_0 \leq \frac{1}{u_0} \sum_{n=0}^{N-1} a_n$: u est une suite croissante majorée donc CV.

22 - solution

- (a) $t_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
 - $\text{DL}_2(0) : \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, on a $\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
 - Avec le même DL au même ordre (à l'ordre 1, le terme en $1/n^2$ n'est pas correct), rendu licite par le fait que $-\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \left(-\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} - \frac{\alpha^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{\alpha}{n} + \frac{2\beta - \alpha^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'où $t_n = \frac{2\beta - \alpha^2 - \alpha}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ CV, donc $\sum \frac{2\beta - \alpha^2 - \alpha}{2n^2}$ aussi et $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ aussi. Par linéarité, $\sum t_n$ CV.

- (b) Par comparaison suite-série, la suite $(\ln(v_n))$ converge vers un certain réel ℓ . Donc $v_n \rightarrow A = e^\ell > 0$ puis $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{6n} + \frac{7}{40n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Selon la question 1, il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^{1/6}}$. De fait, $\sum u_n$ DV.

23 - solution

$\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ tgscv.
 $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est décroissante positive sur $\mathbb{R}^+$, CSI :

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{1+x^2}.$$

Sommation, calcul :

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(N+1) \leq R_N \leq \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(N).$$

Or, $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(N) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{N}\right) \sim \frac{1}{N}$. Ainsi, les deux membres extrêmes de l'encadrement précédent sont tous deux équivalents à $\frac{1}{N}$. D'après le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents, on a $R_N \sim \frac{1}{N}$.

24 - solution

1. (a) $nu_n = \frac{n^{1-\alpha}}{\ln^\beta(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\frac{1}{n} = o(u_n)$. Or, $\sum \frac{1}{n}$ DV et $u_n \geq 0$, donc d'après les critères de comparaison des séries, $\sum u_n$ DV.
- (b) $n^{\frac{1+\alpha}{2}} u_n = \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}} \ln^\beta(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right)$. Comme $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, le même critère permet d'affirmer que $\sum u_n$ CV.
- (c) $u_n \geq \frac{1}{n}$; or, $\sum \frac{1}{n}$ DV, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ DV.
2. (a) $f'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{x^2 \ln^2(x)} < 0$ sur $[2, +\infty[$ donc f est décroissante.
- (b) Immédiat avec un dessin (f est décroissante positive).
- (c) Par sommation terme à terme concernant la première inégalité :

$$\sum_{n=3}^N u_n \geq \int_3^{N+1} f = [\ln(\ln(x))]_3^{N+1} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(3)) \rightarrow +\infty.$$

De fait, $\sum_{n=3}^N u_n \rightarrow +\infty$, donc $\sum u_n$ DV.

3. Soit $\beta \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. On pose de même $f_\beta(x) = \frac{1}{x \ln^\beta(x)}$. f est décroissante positive sur $[3, +\infty[$, on a donc le même encadrement. Par sommation terme à terme : $\int_3^{N+1} f_\beta \leq \sum_{n=3}^N u_n \leq \int_2^N f_\beta$, soit :

$$\frac{1}{1-\beta} \left(\ln^{1-\beta}(N+1) - \ln^{1-\beta}(3) \right) \leq \sum_{n=3}^N u_n \leq \frac{1}{1-\beta} \left(\ln^{1-\beta}(N) - \ln^{1-\beta}(2) \right).$$

➤ Si $\beta > 1$, $\frac{1}{1-\beta} \left(\ln^{1-\beta}(N) - \ln^{1-\beta}(2) \right) \rightarrow \frac{\ln^{1-\beta}(2)}{\beta-1}$. On en conclut que la suite des sommes partielles est bornée, donc $\sum u_n$ CV (série à termes positifs).

➤ Si $\beta \in]0, 1[$, $\frac{1}{1-\beta} \left(\ln^{1-\beta}(N+1) - \ln^{1-\beta}(3) \right) \rightarrow +\infty$. De fait, $\sum_{n=3}^N u_n \rightarrow +\infty$, donc $\sum u_n$ DV.

Remarque. On peut noter le résultat final : la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ CV ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

25 - solution

Règle de D'Alembert : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n+2}{(n+1)^3} \sim \frac{1}{n^3} \rightarrow 0$, donc la série converge.

On écrit $(n+1)^2 = n(n-1) + 3n + 1$. $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 5e$.

26 - solution

Soit $N \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(N+1)^2} \rightarrow 1$. Par définition, la série de terme général $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ converge et sa somme vaut : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$.

27 - solution

➤ Convergence. $u_n = \frac{(-8)^n}{(2n)! \sqrt{n+1}}$.

✧ Règle de d'Alembert. $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{8\sqrt{n+1}}{(2n+2)(2n+1)\sqrt{n+2}} \rightarrow 0$ donc la série CV Abs, donc CV.

✧ CSSA. $u_n = (-1)^n |u_n|$, avec $|u_n| = \frac{8^n}{(2n)! \sqrt{n+1}}$. $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{8\sqrt{n+1}}{(2n+2)(2n+1)\sqrt{n+2}} \leq 1$ dès que $n \geq 1$ donc la suite $(|u_n|)$ décroît vers 0 à partir du rang 1. Donc la série converge.

➤ Signe. Notons respectivement S , S_N et R_N la somme, la somme partielle de rang N et le reste d'ordre N de la série précédente (partant de $n = 0$). Pour $N = 1$: $S = S_1 + R_1$ avec $S_1 = 1 - 2\sqrt{2}$ et R_1 , reste d'une série vérifiant le CSSA (à partir du rang 1), est du signe de $u_2 = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{9}\sqrt{3} > 0$ avec $|R_1| \leq \frac{8}{9}\sqrt{3}$. Ainsi $0 \leq R_1 \leq \frac{8}{9}\sqrt{3}$. Alors $1 - 2\sqrt{2} \leq S \leq 1 - 2\sqrt{2} + \frac{8}{9}\sqrt{3}$. On en déduit que $S < 0$ puisque $1 - 2\sqrt{2} + \frac{8}{9}\sqrt{3} < 0$. En effet :

$$1 - 2\sqrt{2} + \frac{8}{9}\sqrt{3} < 0 \iff 9 + 8\sqrt{3} < 18\sqrt{2} \iff 81 + 192 + 144\sqrt{3} < 648 \iff 144\sqrt{3} < 375 \iff 48\sqrt{3} < 175$$

ce qui est immédiat puisque $\sqrt{3} < 2$.

➤ Attention aux mauvaises argumentations.

✧ D'après le CSSA, S est du signe de son premier terme $u_0 = 1 > 0$. Faux puisque le CSSA ne s'applique qu'à partir du rang 1.

✧ $S = u_0 + R_0$ et R_0 est la somme d'une série alternée qui vérifie le CSSA, donc elle est du signe de son premier terme, qui vaut $-2\sqrt{2}$. *Jusque là, pas d'erreur ; mais on ne peut pas contrôler le signe de « 1+ un nombre négatif ».*

28 - solution 1. $\sum \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge en tant que série géométrique (et par linéarité) avec $|\frac{1}{2}| < 1$.

➤ En notant $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$, on a : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$. D'après la règle de D'Alembert, $\sum u_n$ CV.

2. Par linéarité et la question 1, $\sum \frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}} = \sum \frac{1}{2^{n+1}} + \sum \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \sum \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ CV, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$ existe en tant que somme d'une série CV.

3. Si $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^N \left(\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{2^n}\right) \rightarrow 1$. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}} = 1$.

29 - solution ➤ $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, somme de trois TGSCV, donc par linéarité, $\sum u_n$ CV.

➤ Notons $S_N = \sum_{n=2}^N u_n$.

✧ $S_{2N+1} = \sum_{n=2}^{2N+1} u_n = \sum_{k=1}^N (u_{2k} + u_{2k+1}) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right) = H_{2N+1} - 1 - H_N$ en notant H_N la somme partielle de la série harmonique de rang N .

Classiquement : $H_N = \ln(N) + \gamma + o(1)$.

D'où $S_{2N+1} = \ln(2N+1) - 1 - \ln(N) + o(1) = \ln(2) - 1 + o(1) \rightarrow \ln(2) - 1$.

✧ De plus, $S_{2N} = S_{2N+1} - u_{2N+1} \rightarrow \ln(2) - 1 - 0 \dots$

On en déduit que $S_N \rightarrow \ln(2) - 1$, donc $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \ln(2) - 1$.

30 - solution 1. CSI.

4. DES : $\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n}$.

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n-1)} = 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} - H_N.$$

$$\text{Or } \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} = H_{2N} - \frac{1}{2} H_N.$$

Ainsi $S_N = 2(H_{2N} - H_N) = 2\ln(2) + o(1) \rightarrow 2\ln(2)$.

31 - solution $u_n = \sqrt{n} \left(1 + a\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + b\sqrt{1 + \frac{2}{n}}\right) = (a+b+1)\sqrt{n} + \left(\frac{a}{2} + b\right) \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{a}{8} + \frac{b}{2}\right) \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Ainsi, $\sum u_n$ CV ssi $a+b+1=0$ et $\frac{a}{2} + b=0$, soit $a=-2$ et $b=1$.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) - \sum_{n=0}^N (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) = \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} - 1 \rightarrow -1$.

Par définition, il vient : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -1$.

32 - solution 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\theta = \text{Arctan}(p+1) - \text{Arctan}(p) \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

On a $\tan \theta = \frac{1}{1+p(p+1)}$ donc : $\text{Arctan}(p+1) - \text{Arctan}(p) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

2. Somme partielle, télescopage : $S_N = \text{Arctan}(N+1) - \text{Arctan}(0) \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Donc la série de terme général $\text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{2}$.

33 - solution 1. $(r_n) \in [0, 9]^{\mathbb{N}^*}$ est bornée, de sorte que $\frac{r_n}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, TGSCV.

2. Sommation par paquets (finis) :

$$\begin{aligned}
 S_{5n} &= \sum_{k=1}^n \frac{r_{5k}}{5k(5k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_{5k+1}}{(5k+1)(5k+2)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_{5k+2}}{(5k+2)(5k+3)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_{5k+3}}{(5k+3)(5k+4)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_{5k+4}}{(5k+4)(5k+5)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(5k+1)(5k+2)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(5k+2)(5k+3)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{(5k+3)(5k+4)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{(5k+4)(5k+5)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} - \frac{1}{5k+2} \right) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+2} - \frac{1}{5k+3} \right) + 3 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+3} - \frac{1}{5k+4} \right) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+4} - \frac{1}{5k+5} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} + \frac{1}{5k+5} \right) - 5 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{5k+5} \\
 &= H_{5n} - H_n.
 \end{aligned}$$

3. On sait que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, donc $S_{5n} = \ln(5n) - \ln(n) + o(1) = \ln(5) + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(5)$. Comme on sait par ailleurs que la série CV, on sait que (S_n) converge vers une certaine valeur réelle ℓ . Or, (S_{5n}) est une sous-suite de (S_n) donc $S_{5n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Par unicité de la limite, $\ell = \ln(5)$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)} = \ln(5)$.

34 - solution

1. Règle de D'Alembert : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ donc la série converge.

Autre possibilité : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $0 \leq u_n = \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{3}{n} \frac{2}{n} \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n^2}$.

2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$.

3. $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, donc $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.

4. $\forall n \geq N$, $u_{n+p} \leq u_n \left(\frac{1}{2}\right)^p$, puis $\forall n \geq N$:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} = u_n.$$

35 - solution

1. CSSA.

2. CSSA : $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. Donc $|v_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, TGSCV.

3. Notons $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. $w_n = \frac{(-1)^n}{n} \ell - \frac{(-1)^n}{n} u_n$ TGSCV.

4. 0.

36 - solution

1. TSSA.

2. $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n} dt$. On a $\sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^p (-1)^n \int_0^1 t^{2n} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^p (-t^2)^n dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{p+1}}{1 + t^2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} + r_p$ en ayant posé $r_p = (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{t^{2p}}{1 + t^2} dt$.

3. $|r_p| \leq \int_0^1 t^{2p} dt = \frac{1}{2p+1} \rightarrow 0$ donc $S = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

37 - solution

1. (a) $I_n(X) = \int_0^X (e^{-nx} - 2e^{-2nx}) dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx}\right]_0^X - \left[-\frac{1}{n} e^{-2nx}\right]_0^X = \frac{1}{n} (e^{-2nX} - e^{-nX})$.

(b) Comme $n \in \mathbb{N}^*$, on a directement $\ell_n = 0$ par opérations algébriques sur les limites.

(c) La série $\sum \ell_n$ est la série nulle. Elle converge évidemment et $\ell = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

2. (a) Comme $x \in \mathbb{R}^+$, on a $0 \leq e^{-x} < 1$, donc $\sum e^{-nx} = \sum (e^{-x})^n$ converge. Avec le même argument, $\sum e^{-2nx}$ converge. Par stabilité par combinaison linéaire de la convergence d'une série, $\sum f_n$ converge.

Puis : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-2x})^n = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - 2 \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{e^x + 1}$.

(b) $I(X) = \int_0^X \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_0^X \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = [-\ln(1 + e^{-x})]_0^X = \ln(2) - \ln(1 + e^{-X})$.

(c) Par composition, $I(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \ln(2)$ donc $\ell' = \ln(2)$.

Remarque : on constate que $\ell \neq \ell' \dots !$