MATH

Espaces préhilbertiens

Exercices 30

Produit scalaire

1 ☆☆☆

Pour tous $P = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, Q = (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i b_i$.

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2 ☆☆☆ ♥ **ENSEA/ENSIIE PC 14**

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. On considère un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de dimension n et une famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de vecteurs de E telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]$, $i \neq j$, $\langle u_i, u_j\rangle = -1$.
Pour $(u,v) \in E^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\langle\!\langle (u,x),(v,y)\rangle\!\rangle = \langle u, v\rangle + xy$.

1. Montrer que $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ est un produit scalaire sur $E \times \mathbb{R}$.
2. Que peut-on dire de la famille $((u_i,1))_{1\leqslant i\leqslant p}$? En déduire une inégalité entre p et $n+1$.

3 ★★☆

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et a un vecteur unitaire. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour qu'en posant $\varphi(x,y) = \langle x, a\rangle \langle y, a\rangle + \alpha \langle x, y\rangle$, on définisse un produit scalaire sur E.

4 ★☆☆ Ⓐ ♥ **CCinP+ PC 21**

Pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la norme de $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle T, P\rangle = P(0)$.
4. ★★★ *Théorème de représentation de Riesz.*
   Montrer qu'il existe un unique polynôme $T \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle T, P\rangle = P(0)$.

Établir une inégalité

5 ☆☆☆ Ⓐ ♥

Montrer que : $\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\left(\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 t\,(f(t))^2\,\mathrm{d}t$.

6 ☆☆☆ Ⓐ ♥

Montrer que, pour tout $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n$: $\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2$.

7 ☆☆☆ Ⓐ

Pour toute fonction f continue et strictement positive sur $[a,b]$, on pose $\ell(f) = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$.

Montrer que $\ell(f) \geqslant (b-a)^2$ et étudier le cas d'égalité.

8 ★☆☆ Ⓐ ♥

1. Montrer que, si $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$, $\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$.
2. Résoudre le système d'inconnue $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$: $\left\{\begin{array}{l} x_1+\cdots+x_n = n; \\ x_1^2+\cdots+x_n^2 = n. \end{array}\right.$

9 ★★☆ Ⓐ St Cyr MP 23

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], \|f_k - e_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que le résultat précédent serait en défaut avec la seule hypothèse $\forall k \in [\![1, n]\!], \|f_k - e_k\| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

10 ★☆☆ Ⓐ TPE-EIVP PC 18

Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\Phi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^\top B)$, où $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$; on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
2. Montrer que : $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

11 ★★☆ Ⓐ ♡

Montrer que, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ à valeurs réelles et nulle en 0, alors $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t$.

12 ★★☆ Ⓐ Mines-Ponts MP 21

Soit $f \in \mathscr{C}([0\,,1]\,,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0\,,1]$, $\displaystyle\int_x^1 f \geqslant \frac{1-x^2}{2}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

13 ☆☆☆ Ⓐ CCinP MP 21

Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(\mathrm{Tr}(A))^2 \leqslant n\,\mathrm{Tr}(A^\top A)$.
3. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(A^\top B) \leqslant n$.
4. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$ ***ssi*** $A = B$.
5. ★☆☆ Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}((AB)^2) \leqslant \mathrm{Tr}(A^2B^2)$.

Projeté orthogonal, distance

14 ☆☆☆ Mines-Telecom MP 21

On munit $E = \mathscr{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\forall f, g \in E$, $(f|g) = \displaystyle\int_0^\pi fg$.
Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto x$ sur $\{f \in E,\ f'' + f = 0\}$.

15 ☆☆☆ Ⓐ

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures.

16 ★☆☆ ♥ CCinP MP 23

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $f, g \in E$, on pose $(f|g) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg$.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto (f|g)$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$ sur le sous-espace vectoriel engendré par $a = \cos$ et $b : x \mapsto \cos(2x)$.

17 ★☆☆ ✍ Ⓐ ♥ Mines-Ponts PC 18

Justifier l'existence et déterminer la valeur de la borne inférieure de $\left\{\displaystyle\int_{-1}^1 (t^3 - (at^2 + bt + c))^2\,\mathrm{d}t,\ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$.

18 ★☆☆ Ⓐ

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de place (i,j) est noté $[A]_{i,j}$. Calculer $\inf\limits_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ([S]_{i,j} - [A]_{i,j})^2$.

19 ★☆☆ Ⓐ ♥ CCinP PSI 21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, Q \rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa dimension.
3. Calculer la distance $\mathrm{d}(1, E)$.

Orthogonalité

20 ☆☆☆ ♥

Soient E un espace euclidien et F, G deux sev de E. Montrer que :

1. $F \subset G \iff G^\perp \subset F^\perp$;
2. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
3. $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

21 ★☆☆ ♥ CCinP PSI 18

Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$, où $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer l'orthogonal de l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

22 ★☆☆ Ⓐ ♥

Soit $E = \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E,\ f'' = f\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires dans E.

23 ★★☆ Ⓐ ♡ CCinP PSI 21

Soit E un espace préhilbertien. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E telle que $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$.

1. Montrer que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\|e_j\| \leqslant 1$.
2. Soit x un vecteur normé orthogonal à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Calculer $\langle x, e_n \rangle^2$ et en déduire la norme de e_n.
3. En déduire que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Projecteurs et symétries orthogonaux

24 ☆☆☆ ♥ CCinP PC (m) 19

Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, on note $u = (1, 0, -3)$, p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathrm{Vect}(u)$ et q le projecteur orthogonal sur l'orthogonal de cette droite.

1. Déterminer la matrice représentative de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une relation entre p et q.
3. En déduire la matrice représentative de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

25 ★☆☆ ✍ ♥

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On considère le plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^4$ de représentation cartésienne :

$$\mathcal{P} \ :\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\ ; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

1. Trouver une base orthonormée de $\mathcal{P}$.
2. Former la matrice P dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.
3. Former la matrice S dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

26 ★★☆ Ⓐ ♡

Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal ***ssi*** $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Conséquences sur l'algèbre linéaire

27 ☆☆☆ Ⓐ ♥

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^\top A)$.

28 ☆☆☆ ♡

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}\left(A^\top\right) = (\mathrm{Im}(A))^\perp$.

29 ★☆☆ Ⓐ ♥

Soient E un espace préhilbertien réel et deux applications $f, g : E \to E$ tels que : $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$. Montrer que f et g sont endomorphismes de E.

30 ★★★

Soient E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. On considère n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de E. Montrer que $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant ||x_1|| \ldots ||x_n||$.

Indications

4 3. Par l'absurde. 4. Analyse-synthèse, utiliser $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = 0\}$ et $\mathbb{R}_n[X] = H \oplus H^\perp$.

5 ICS avec un choix judicieux.

6 ICS dans un contexte jusdicieux.

7 ICS avec deux fonctions bien choisies dans un espace préhilbertien bien choisi.

8 1. ICS avec deux vecteurs bien choisis. 2. On est dans le cas d'égalité de l'ICS !

9 1. Raisonner par l'absurde et penser à l'ICS.

10 2. Définir de manière sommatoire $\|AB\|^2$ et rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

11 Écrire une relation entre f et $\int f'$. Puis appliquer l'ICS dans un espace préhilbertien bien choisi.

12 Intégrer terme à terme l'hypothèse de l'énoncé.

13 2. ICS. 3. Spé : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M^\top M = \mathrm{I}_n\}$. 4. Observer $A - B$. 5. Calculer $\mathrm{Tr}((AB - BA)^2)$.

15 2. Décomposer la matrice comme somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice dans l'orthogonale.

17 Considérer l'espace $E = \mathscr{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, et interpréter en terme de distance.

18 Introduire le ps canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, voir que l'on cherche le carré de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et observer $A = \dfrac{A + A^\top}{2} + \dfrac{A - A^\top}{2}$.

19 3. Observer $\langle P, 1\rangle$.

22 2. Orthogonalité : IPP. Caractère supplémentaire : analyse-synthèse.

23 1 et 3. Tourner autour de la relation donnée pour $x = e_j$. 2. ICS.

25 3. On appelle symétrie orthogonale la symétrie associée au projecteur orthogonal...

26 Procéder par double implication. Dans l'hypothèse où $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, poser, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \|y + tz\|^2$.

27 ($\supset$) Multiplier par $X^\top$ à gauche et observer un produit scalaire.

29 Montrer que $\langle f(\lambda x + \mu y), z\rangle = \langle \lambda f(x) + \mu f(y), z\rangle$ et conclure en observant la différence des deux termes.

30 Si la famille est liée, c'est évident. Sinon, orthogonaliser la famille et fabriquer la matrice $N^\top N$ associée.

Solutions

1 - solution ➢ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un forme puisque la somme infinie définissant ce produit scalaire est finie.

➢ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est clairement bilinéaire symétrique.

➢ Soit $P=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}[X]$.

✧ $\langle P,P\rangle=\sum\limits_{i=0}^{+\infty}a_i^2\geqslant 0$.

✧ $\langle P,P\rangle=\sum\limits_{i=0}^{+\infty}a_i^2=0$ ***ssi*** pour tout $i\in\mathbb{N}$, $a_i=0$, donc $P=0$.

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2 - solution

1. Fbsdp.
2. La famille est orthogonale, donc libre ce qui entraîne $p\leqslant n+1$.

3 - solution φ est une fbs. Seul le caractère dp n'est pas évident. Montrons qu'il équivaut à $\alpha>0$.

➢ Supposons $\alpha>0$.

✧ Si $x\in E$, $\varphi(x,x)=\langle x,a\rangle^2+\alpha\|x\|^2\geqslant 0$.

✧ Si $x\in E$, $\varphi(x,x)=0\iff\langle x,a\rangle^2=\alpha\|x\|^2=0\iff\|x\|=0$ car $\alpha>0$.

➢ Réciproquement, supposons φ dp.

✧ Déjà, $\varphi(a,a)>0$, donc $1+\alpha>0$, donc $\alpha>-1$.

✧ Supposons par l'absurde $\alpha=0$. Alors, $\forall x\in\mathrm{Vect}(a)^\perp$, $\varphi(x,a)=0$. Donc φ n'est pas définie positive.

✧ Supposons par l'absurde $\alpha<0$. Comme E est de dimension $n\geqslant 2$, $\mathrm{Vect}(a)^\perp\neq\{0\}$. Soit $b\in\mathrm{Vect}(a)^\perp$. Posons $x=a+b$. $\varphi(x,x)=0\iff 1+\alpha(1+\|b\|^2)=0\iff\|b\|^2=-\frac{1+\alpha}{\alpha}$. Comme $-1<\alpha<0$, $\frac{1+\alpha}{\alpha}<0$, donc on peut trouver un vecteur b non nul dans $\mathrm{Vect}(a)^\perp$ de norme $-\frac{1+\alpha}{\alpha}$. Pour ce vecteur b, on a donc $a+b\neq 0$ et $\varphi(a+b,a+b)=0$. Le caractère défini n'est donc pas satisfait.

On en déduit que $\alpha>0$.

4 - solution

1. Fbsdp.
2. $\|P_n\|=\sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.
3. Par l'absurde, supposons qu'il en existe un. En particulier, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{n}=P_n(0)=\langle T,P_n\rangle\leqslant\|T\|\|P_n\|$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $\|T\|\geqslant\sqrt{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, absurde.
4. *Analyse.* Soit $T\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\langle T,P\rangle=P(0)$. Dès que $P\in\mathbb{R}_n[X]$ vérifie $P(0)=0$, on a $\langle T,P\rangle=0$, donc $T\in H^\perp$, où $H=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ P(0)=0\}$ hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. $H^\perp$ est une droite, dirigée par un certain vecteur Q. Donc il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $T=aQ$. De plus, $\langle T,Q\rangle=Q(0)=a\|Q\|^2$, donc $a=\frac{Q(0)}{\|Q\|^2}$. Ainsi, $T=\frac{Q(0)}{\|Q\|^2}Q$ et T est unique.
   Synthèse. Le polynôme $T=\frac{Q(0)}{\|Q\|^2}Q$ est bien dans $\mathbb{R}_n[X]$. Soit alors $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On décompose $P=R+bQ$ en accord avec la somme directe $\mathbb{R}_n[X]=H\oplus H^\perp$: on a alors $\langle T,P\rangle=bQ(0)=P(0)$. D'où l'existence.

5 - solution Produit scalaire usuel dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$: $\langle u,v\rangle=\int_0^1 uv$.
Fixons $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. ICS avec $u:t\mapsto\sqrt{t}$ et $v:t\mapsto\sqrt{t}f(t)$.

6 - solution ICS dans $\mathbb{R}^n$ appliquée aux vecteurs $y=\left(\sqrt{x_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $z=\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

7 - solution ICS avec $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$: $(b-a)^2=\left(\int_a^b\sqrt{f}\times\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b\frac{1}{f}\right)$.
Cas d'égalité : il faut qu'il y ait égalité dans l'ICS, donc que $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ soient proportionelles, donc qu'il existe une constante réelle c telle que $\sqrt{f}=c\frac{1}{\sqrt{f}}$; autrement dit, que f soit constante. Et on vérifie facilement que cela suffit aussi.

8 - solution

1. ICS avec $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(1,\dots,1)$.
2. On est dans le cas d'égalité de l'ICS : x et y sont donc colinéaires. Notons $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $x=\lambda y$. En injectant dans la première relation, on obtient $\lambda=1$, donc le système admet pour unique solution $(1,\dots,1)$.

9 - solution 1. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$. Supposons $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0_E$.

Par l'absurde, on suppose que les λ_k ne sont pas tous nuls, ce qui entraîne $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2 > 0$ $(\star)$.

On écrit alors $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(f_k-e_k) = \sum\limits_{k=1}^n (-\lambda_k)e_k$. Les normes sont *a fortiori* égales :

$$\left\|\sum_{k=1}^n \lambda_k(f_k-e_k)\right\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^n (-\lambda_k)e_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \quad \text{(BON)}.$$

Or, IT : $\left\|\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(f_k-e_k)\right\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^n |\lambda_k|\,\|f_k-e_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^n |\lambda_k|$, d'après $(\star)$.

Donc $\left\|\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(f_k-e_k)\right\|^2 < \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^n |\lambda_k|\right)^2$. ICS dans $\mathbb{R}^n$: $\left(\sum\limits_{k=1}^n |\lambda_k|\right)^2 \leqslant n\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2$.

Bilan : $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2 < \frac{1}{n} n \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2$, absurde.

2. Pour $n=2$ et (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il est facile de voir que $(f_1,f_2)=\left(\frac{i+j}{2},\frac{i+j}{2}\right)$ vérifie $\|f_k-e_k\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$, mais ce n'est clairement pas une base...

10 - solution 1. Fbsdp.

2. Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que $\|AB\|^2\leqslant\|A\|^2\|B\|^2$.

On observe $\|A\|^2=\mathrm{Tr}(A^\top A)=\sum\limits_{j=1}^n [A^\top A]_{j,j} = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} [A]_{i,j}^2$.

On peut appliquer la même démarche pour $\|AB\|^2$ et on observe alors le terme général de la somme double :

$$\begin{aligned} [AB]_{i,j}^2 &= \sum_{k=1}^n [A]_{i,k}^2[B]_{k,j}^2 \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^n [A]_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n [B]_{k,j}^2\right). \quad (\text{ICS dans } \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

En sommant : $\|AB\|^2 \leqslant \left(\sum\limits_{1\leqslant i,k\leqslant n} [A]_{i,k}^2\right)\left(\sum\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n} [B]_{k,j}^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2$.

11 - solution Soit $t\in[0,1]$. TFA : $f(t)=f(t)-f(0)=\int_0^t f'(u)\ \mathrm{d}u$. Donc $f^2(t)=\left(\int_0^t f'(u)\ \mathrm{d}u\right)^2$.

ICS dans l'espace préhilbertien usuel $(\mathscr{C}^0([0,t],\mathbb{R})$: $\left(\int_0^t f'(u)\ \mathrm{d}u\right)^2 \leqslant \left(\int_0^t 1^2\ \mathrm{d}u\right)\left(\int_0^t f'^2(u)\ \mathrm{d}u\right)$.

Autrement dit : $f(t)^2\leqslant t\left(\int_0^t f'(u)^2\ \mathrm{d}u\right)\leqslant t\left(\int_0^1 f'(u)^2\ \mathrm{d}u\right)$ car $f'^2\geqslant 0$ et $t\leqslant 1$.

Par positivité de l'intégrale : $\int_0^1 f(t)^2\ \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 t\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 f'(u)^2\ \mathrm{d}u\right)$. D'où le résultat.

12 - solution Posons $\varphi : x\mapsto \int_x^1 f$. TFA : φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,,1]$ et $\varphi'=-f$.

On intègre l'inégalité de l'énoncé : $\int_0^1\varphi \geqslant \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

IPP : $\int_0^1 \varphi = [x\varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x$.

ICS : $\left(\int_0^1 xf(x)\ \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int 01x^2\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)^2\ \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)^2\ \mathrm{d}x$.

Bilan : $\frac{1}{9}\leqslant\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)^2\ \mathrm{d}x$, soit $\int_0^1 f(x)^2\ \mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{3}$.

13 - solution 1. Cours...

2. ICS avec A et I_n.
3. ICS avec A et B.
4. $\forall X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AX)=\mathrm{Tr}(BX)$ ***ssi*** $\forall X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}((A-B)X)=0$ ***ssi*** $A-B\in E^\perp=0_n$ ***ssi*** $A=B$.

5. Notons $C = AB - BA$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(C^2) &= \operatorname{Tr}(ABAB + BABA - ABBA - BAAB)\\ &= \operatorname{Tr}(ABAB) + \operatorname{Tr}(BABA) - \operatorname{Tr}(ABBA) - \operatorname{Tr}(BAAB)\\ &= 2\operatorname{Tr}((AB)^2) - 2\operatorname{Tr}(A^2B^2)\ ;\end{aligned}$$

Or, C est antisymétrique donc $\operatorname{Tr}(C^2) = -\operatorname{Tr}(C^\top C) = -\langle C, C\rangle \leqslant 0$. D'où l'inégalité.

14 - solution Résolution d'un système : $-\frac{4}{\pi}\cos + 2\sin$.

15 - solution 1. C'est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Notons $\mathcal{T}$ le sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures.
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{T}^\perp} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{T}}$ donc la distance cherchée est la norme de la première matrice : 1.

16 - solution 1. Fbsdp. Caractère défini : soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = 0$. Par stricte positivité de l'intégrale, on peut dire que $\forall x \in [0, 2\pi]$, $[f(x)]^2 = 0$ puis $f(x) = 0$.
Par 2π-périodicité de f, on a donc bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, soit $f = 0_E$.

2. Trois démarches possibles.
   - *Démarche standard par Gram-Schmidt.* On orthonomalise (a, b).
     - $\|a\|^2 = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, donc on pose $\alpha = \sqrt{2}a$.
     - On observe : $(a|b) = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(3t)+\cos(t)}{2}\,\mathrm{d}t = 0$.
       Comme $a \perp b$, il n'y a donc qu'à normaliser b.
       $\|b\|^2 = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, donc on pose $\beta = \sqrt{2}b$.

     Ainsi, (α, β) est une BON de F. En conséquence, le projeté v de u sur $\operatorname{Vect}(a, b)$ est $v = (u|\alpha)\,\alpha + (u|\beta)\,\beta$.
     En reprenant les calculs précédents, on calcule :
     - $(u|\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t)\frac{1-2\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = 0$.
     - $(u|\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2t)\frac{1-2\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

     Conclusion :$u = -\frac{\sqrt{2}}{4}\beta = -\frac{1}{2}b$.
   - *Démarche standard par résolution du système.* v est le projeté de u sur $\operatorname{Vect}(a, b)$ lorsque $v \in \operatorname{Vect}(a, b)$ et $u - v \in \operatorname{Vect}(a, b)^\perp$. On pose donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda a + \mu b$ et on résout :

$$\begin{aligned} v \in \operatorname{Vect}(a,b)^\perp &\iff \begin{cases} u - v \perp a\\ u - v \perp b\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} (u - \lambda a - \mu b|a) = 0\\ (u - \lambda a - \mu b|b) = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} (u|a) - \lambda\|a\|^2 - \mu(b|a) = 0\\ (u|b) - \lambda(a|b) - \mu\|b\|^2 = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} -\lambda\frac{1}{2} = 0\\ -\frac{1}{4} - \mu\frac{1}{2} = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} \lambda = 0\\ \mu = -\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

     En résumé, on retrouve $v = -\frac{1}{2}b$.
   - *Observation astucieuse.* $1 \perp a$ et $1 \perp b$, donc on écrit $u = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in F^\perp} - \underbrace{\frac{1}{2}b}_{\in F}$, donc $v = -\frac{1}{2}b$.

17 - solution On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}_3[X] \subset \mathscr{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique sur ce dernier espace : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 fg$. La quantité cherchée est $d = \mathrm{d}(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \|X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2 = \|p_{\mathbb{R}_2[X]^\perp}(X^3)\|^2$.
d est le carré de la distance d'un vecteur à un sev, son existence est donc assurée.
Trois méthodes pour le calcul de d.

➢ *Orthonormaliser la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$. Procédé de Gram-Schmidt sur $(f_1, f_2, f_3) = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce ps :

✧ On pose $e_1 = f_1 = 1$. $\|e_1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1 \text{ d}t = 2$ donc on pose $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

✧ On pose $e_2 = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1 = X$ car $1 \perp X$ par parité. $\|e_2\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 \text{ d}t = \frac{2}{3}$ donc on pose $\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X$.

✧ On pose $e_3 = f_3 - \langle f_3, e_1 \rangle e_1 - \langle f_3, e_2 \rangle e_2 = X^2 - \frac{1}{3}$. $\|e_3\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) \text{ d}t = \frac{8}{45}$.
Donc on pose $\varepsilon_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)$.

On peut alors écrire $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \left\langle X^3, e_1 \right\rangle e_1 + \left\langle X^3, e_2 \right\rangle e_2 + \left\langle X^3, e_3 \right\rangle e_3$.
Pour des raisons de parité, $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \left\langle X^3, e_2 \right\rangle e_2 = \frac{3}{5} X$.

➢ *Écrire les équations d'orthogonalisation.* Si on note $P = a + bX + cX^2$ le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\begin{cases} X^3 - P \perp 1 \\ X^3 - P \perp X \\ X^3 - P \perp X^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle P, 1 \rangle = \langle X^3, 1 \rangle \\ \langle P, X \rangle = \langle X^3, X \rangle \\ \langle P, X^2 \rangle = \langle X^3, X^2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} a + \frac{2c}{3} = 0 \\ \frac{2b}{3} = \frac{2}{5} \\ \frac{2a}{3} + \frac{2c}{5} = 0 \end{cases}$$

On en déduit $a = c = 0$ et $b = \frac{3}{5}$, donc $P = p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \frac{3}{5} X$.

➢ *Trouver l'orthogonal de* $\mathbb{R}_2[X]$. Clairement, $\mathbb{R}_2[X]^\perp$ est de dimension 1, il suffit donc de trouver un vecteur orthogonal à $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_2[X]^\perp$, on a :

$$\begin{cases} P \perp 1 \\ P \perp X \\ P \perp X^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle P, 1 \rangle = 0 \\ \langle P, X \rangle = 0 \\ \langle P, X^2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + \frac{2c}{3} = 0 \\ \frac{2b}{3} + \frac{2d}{5} = 0 \\ \frac{2a}{3} + \frac{2c}{5} = 0 \end{cases}$$

On en déduit $a = c = 0$ et $b = -\frac{3}{5} d$. Ainsi, $\mathbb{R}_2[X]^\perp = \text{Vect}\left(X^3 - \frac{3}{5} X\right)$.
On remarque alors que $X^3 - \left(X^3 - \frac{3}{5} X\right) = \frac{3}{5} X \in \mathbb{R}_[X]$, de sorte que $p_{\mathbb{R}_2[X]^\perp}(X^3) = X^3 - \frac{3}{5} X$.

Finalement, $d = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5} t\right)^2 \text{ d}t = \frac{8}{175}$.

18 - solution C'est le carré de la distance d de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. $d^2 = \left\| \frac{A - A^\top}{2} \right\|^2$.

19 - solution

1. Fbsdp.
2. $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \ P(1) = 0\}$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $f : P \mapsto P(1)$, c'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, il est de dimension n.
3. On remarque que $\langle P, 1 \rangle = P(1)$, donc $E = \text{Vect}(1)^\perp$ et $\text{d}(1, E) = \|1\| = 1$.

20 - solution

➢ M1 Par équivalences, directement :

$$\begin{aligned} F \subset G &\iff F \subset (G^\perp)^\perp \quad \text{car, comme } E \text{ est de dimension finie, } G = (G^\perp)^\perp, \\ &\iff F \perp G^\perp \\ &\iff G^\perp \subset F^\perp. \end{aligned}$$

M2 On commence par une première implication.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $F \subset G$. Soit $x \in G^\perp$. On a donc $\forall y \in G, \ (x|y) = 0$.
Comme $F \subset G$, on a *a fortiori* $\forall y \in F, \ (x|y) = 0$, soit $x \in F^\perp$. D'où l'implication $F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ On peut appliquer l'implication directe avec $F^\perp$ et $G^\perp$: $F^\perp \subset G^\perp \Longrightarrow (G^\perp)^\perp \subset (F^\perp)^\perp$.
Or, E est de dimension finie, donc $(F^\perp)^\perp = F$ et $(G^\perp)^\perp = G$ d'où l'implication réciproque.

➢ Montrons $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

✧ $\boxed{\subset}$ Soit $x \in (F + G)^\perp$. Montrons que $x \in F^\perp \cap G^\perp$.
Par symétrie des rôles des lettres F et G, il suffit de montrer que $x \in F^\perp$.
Comme $x \in (F + G)^\perp$, on a $\forall y \in F + G, \ (x|y) = 0$. Or, $F \subset F + G$, donc *a fortiori* $\forall y \in F, \ (x|y) = 0$. Ainsi, $x \in F^\perp$.
On en déduit l'inclusion annoncée.

✧ $\boxed{\supset}$ Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. On a donc $\forall y \in F, \ (x|y) = 0$ et $\forall z \in G, \ (x|z) = 0$. Soit alors $t \in F + G$: il existe $(x, y) \in F \times G$ tel que $t = x + y$. Alors $(x|t) = (x|y + z) = (x|y) + (x|z) = 0$, donc $x \in (F + G)^\perp$.

D'où la relation $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

➢ La relation précédente est en particulier vraie pour les sev $F^\perp$ et $G^\perp$:

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp, \quad \text{soit } (F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G.$$

On en déduit que leurs orthogonaux sont égaux : $((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = (F \cap G)^\perp$, soit $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

21 - solution

1. ...
2. On sait déjà que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$:

$$\langle S, A\rangle = \mathrm{Tr}(S^\top A) = \mathrm{Tr}(SA) = \mathrm{Tr}((SA)^\top) = \mathrm{Tr}(A^\top S^\top) = \mathrm{Tr}(-AS) = -\langle A, S\rangle = -\langle S, A\rangle,$$

donc $\langle S, A\rangle = 0$. Ainsi, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. D'où le résultat.

3. Soit $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})^\perp$: $\forall D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, $M \perp D$ i.e. $\langle M, D\rangle = 0$ i.e. $\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} d_{i,i} = 0$.

➢ Choix de $D = E_{i,i}$: $m_i, i = 0$ donc M est à diagonale nulle.

➢ Réciproquement, si M est à diagonale nulle, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} d_{i,i} = 0$.

Donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})^\perp$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

22 - solution

1. Fbsdp.
2. ➢ *Orthogonalité.* Soit $f \in F$ et $g \in G$. IPP ($u = g'$, $v' = f'$, u, v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$) :

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + [f(t)g'(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)g''(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme $f(0) = f(1) = 0$, on a $[f(t)g'(t)]_0^1 = 0$. Et comme $g \in G$, $\int_0^1 f(t)g''(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, donc $\langle f, g\rangle = 0$, ce qui entraîne que F et G sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

➢ *Caractère supplémentaire.* Par analyse-synthèse.

✧ *Analyse.* Soit $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. On a $h(0) = g(0)$, $h(1) = g(1)$ et $h'' = f'' + g''$.
De plus $G = \mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $g = a\,\mathrm{ch} + b\,\mathrm{sh}$ et $f = h - a\,\mathrm{ch} - b\,\mathrm{sh}$. Il suffit donc d'exprimer a et b en fonction de h. On a :

$$\begin{cases} h(0) = f(0) + g(0) \\ h(1) = f(1) + g(1) \end{cases} \iff \begin{cases} a = h(0) \\ b = \frac{h(1) - h(0)\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)} \end{cases}.$$

Ainsi g et f sont déterminées de manière unique.
Notons que, comme on a déjà montré l'orthogonalité de F et G, cette partie « analyse » est superflue. Cela dit, la « synthèse » est requise, et sans la partie « analyse », il faut avoir beaucoup d'intuition pour former a, b, g et f...

✧ *Synthèse.* Soit $h \in E$, on pose a, b, f et g comme ci-dessus.
On a $g = a\,\mathrm{ch} + b\,\mathrm{sh}$ alors $g \in G$.
On vérifie aussi que $f \in F$.
Et naturellement, comme $f = h - g$, on a bien $h = f + g$.
Ainsi, la synthèse est établie et l'existence de f et g obtenue.

Donc $E = F \oplus G$.

23 - solution

1. Choisissons $x = e_j$ dans la relation de l'énoncé :

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, e_i\rangle^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} \langle e_j, e_i\rangle^2$$

donc $\|e_j\|^2 - \|e_j\|^4 = \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} \langle e_j, e_i\rangle^2 \geqslant 0$, ce qui se réécrit $\|e_j\|^2 \left(1 - \|e_j\|^2\right) \geqslant 0$. Or, $e_j \neq 0_E$, puisque c'est un vecteur d'une famille libre, donc $\|e_j\|^2 > 0$; on en déduit que $1 - \|e_j\|^2 \geqslant 0$, d'où le résultat.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 = \langle x, e_n \rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|e_n\|^2$. Donc $\|e_n\| \geqslant 1$. Et, selon la question 1, $\|e_n\| = 1$.
3. $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs normés, en reprenant la démarche de la question 2 pour les autres vecteurs. Puis $1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, e_i \rangle^2$, soit $\sum_{i \neq j} \langle e_j, e_i \rangle^2 = 0$, puis $\langle e_j, e_i \rangle = 0$ et la famille est orthogonale.

24 - solution 1. En notant $\varepsilon = \frac{u}{\|u\|}$, on a une BON (ε) de $\mathrm{Vect}(u)$ et on peut ainsi écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ p(x) = \langle x, \varepsilon \rangle \varepsilon = \frac{1}{10} \langle x, u \rangle u.$$

On calcule $p(1,0,0) = \frac{1}{10}(1,0,-3)$, $p(0,1,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $p(0,0,1) = -\frac{3}{10}(1,0,-3)$.

La matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

2. p est alors le projeté sur $F = \mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à $F^\perp$ et q est le projeté sur $F^\perp$ parallèlement à F, donc $p+q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
3. La relation 2 tient encore matriciellement : la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25 - solution 1. $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ avec $f_1 = (1,0,0,1)$ et $f_2 = (2,-1,1,0)$. On orthonormalise avec le procédé de Gram-Schmidt :
- ➢ $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)$.
- ➢ Puis $e_2 = f_2 - \langle f_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = (1,-1,1,-1)$ et $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$.

Et on peut alors affirmer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est un BON de $\mathcal{P}$.

2. Comme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathcal{P}$, on peut dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $p(x) = \langle x, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle x, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$. On calcule donc :
- ➢ $p(1,0,0,0) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.
- ➢ $p(0,1,0,0) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.
- ➢ $p(0,0,1,0) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.
- ➢ $p(0,0,0,1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Et la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $S = 2P - \mathrm{I}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

26 - solution Procédons par double implication.
- ➢ Supposons p orthogonal. Soi $x \in E$. $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Or, $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$ donc, d'après le théorème de Pythagore : $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$. Comme $\|x - p(x)\|^2 \geqslant 0$, on a $\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$, puis $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
- ➢ Supposons que $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Montrons que $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$. Soit $(y,z) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \|y + tz\|^2$.
  - ✧ Avec l'hypothèse de l'énoncé, $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geqslant \|p(y + tz)\|^2 = \|y^2\| = P(0)$.
  - ✧ En développant, $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \|y\|^2 + 2t \langle y, z \rangle + t^2 \|z\|^2$ donc P est un polynôme de degré deux.

  De fait, P admet un minimum en 0, donc $P'(0) = 0$, soit $\langle y, z \rangle = 0$.

27 - solution $\boxed{\subset}$ Trivial. $\boxed{\supset}$ Soit $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$: $A^\top AX = 0$. Donc $X^\top A^\top AX = 0$, soit $\|AX\| = 0$, avec la norme euclidienne sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Bref, $AX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}(A)$.

28 - solution $\boxed{\subset}$ Soit $X \in \mathrm{Ker}\left(A^\top\right)$. Montrons que $X \in (\mathrm{Im}(A))^\perp$. Soit $Y \in \mathrm{Im}(A)$: $\exists Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y = AZ$. Alors $\langle Y, X \rangle = Y^\top X = Z^\top A^\top X = 0$.
Ensuite, deux possibilités.

- *Égalité des dimensions.* $\dim\left((\mathrm{Im}(A))^{\perp}\right) = n - \dim(\mathrm{Im}(A)) = n - \dim\left(\mathrm{Im}\left(A^{\top}\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(A^{\top}\right)\right)$.
- *Inclusion réciproque.* Soit $X \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$. Montrons que $X \in \mathrm{Ker}\left(A^{\top}\right)$.
  On a $\|A^{\top}X\|^2 = X^{\top}AA^{\top}X = \left\langle X, AA^{\top}X\right\rangle = 0$ car $AA^{\top}X \in \mathrm{Im}(A)$. Donc $A^{\top}X = 0$.

29 - solution Il suffit de montrer que f est linéaire. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$. Fixons $z \in E$.

$$\begin{aligned}\langle f(\lambda x + \mu y), z\rangle &= \langle \lambda x + \mu y, g(z)\rangle \\ &= \lambda\langle x, g(z)\rangle + \mu\langle y, g(z)\rangle \\ &= \lambda\langle f(x), z\rangle + \mu\langle f(y), z\rangle \\ &= \langle \lambda f(x) + \mu f(y), z\rangle .\end{aligned}$$

Donc, en notant $v = f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)$, on a $\langle v, z\rangle = 0$. On en déduit que $v = 0_E$.
- *Justification 1* : ceci étant valable pour tout $z \in E$, on peut dire que $v \in E^{\perp} = \{0_E\}$, donc $v = 0_E$.
- *Justification 2* : ceci étant valable pour tout $z \in E$, on peut choisir $z = v$: $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = 0$, donc $v = 0_E$.

Ainsi, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
Donc f est linéaire et, par symétrie des rôles joués par f et g dans cet exercice, g est automatiquement linéaire.

30 - solution
- Si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, alors $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ et l'inégalité est vraie.
- Supposons donc $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre et notons $M = \underset{\mathscr{B}}{\mathcal{M}\mathrm{at}}(x_1, \ldots, x_n)$. On veut prouver $\det(M) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|$. Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt : il existe $(y_1, \ldots, y_n)$ une famille orthogonale telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $y_k = x_k + a_{k,k-1}x_{k-1} + \cdots + a_{k,1}x_1$.
  Notons $N = \underset{\mathscr{B}}{\mathcal{M}\mathrm{at}}(y_1, \ldots, y_n)$. Comme la k-ème colonne de N est obtenue par des combinaisons linéaires des autres colonnes de M et de la k-ème colonne de M, opération élémentaire qui ne change pas le déterminant, on a :

  $$\det(M) = \det(N).$$

  Posons alors $D = N^{\top}N = ([D]_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a alors $[D]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [N^{\top}]_{i,k}[N]_{k,j} = \langle y_i, y_j\rangle$.
  Or la famille $(y_1, \ldots, y_n)$ est une famille orthogonale, donc $D = \mathrm{diag}(\|y_1\|^2, \ldots, \|y_n\|^2)$.
  On en déduit que $\det(D) = \det(N)^2 = \prod_{k=1}^{n} \|y_k\|^2$, ce qui entraîne $|\det(N)| = \prod_{k=1}^{n} \|y_k\|$.
  Observons que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|y_k\| \leqslant \|x_k\|$. Soit donc $k \in [\![1, n]\!]$. Récurrence : $x_k = y_k - a_{k,k-1}y_{k-1} - \cdots - a_{k,1}y_1$. Par orthogonalité de la famille (y_k) et théorème de Pythagore :

  $$\|x_k\|^2 = \|y_k\|^2 + a_{k,k-1}^2\|y_{k-1}\|^2 + \cdots + a_{k,1}^2\|y_1\|^2 \geqslant \|y_k\|^2.$$

  Conclusion : $|\det(M)| = |\det(N)| = \prod_{k=1}^{n} \|y_k\| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|$.