MATH

Variables aléatoires

Exercices 28

Loi d'une va

1 ☆☆☆ ♥

Une loterie comporte n billets, dont un seul est gagnant. On tire les billets un par un et sans remise. On note X le rang d'apparition du billet gagnant. Loi de X ?

2 ☆☆☆

On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et celle de naissance d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants. Loi de X ?

3 ☆☆☆ ♥

On lance 100 billes sur une surface percée de 10 trous de 10 couleurs différentes, chaque trou pouvant accueillir éventuellement les 100 billes. X est le nombre de billes dans le trou rouge. Loi de X ?

4 ★☆☆ ♥

La probabilité pour qu'un réacteur d'avion tombe en panne au cours d'un vol est $p \in]0\,,1[$. On fait l'hypothèse que, sur un même avion, les réacteurs tombent en panne indépendamment les uns des autres. Un avion peut terminer son vol sans s'écraser si la moitié au moins de ses réacteurs fonctionne.

1. Déterminer la probabilité d'accident pour un avion à deux réacteurs. Faire de même pour un avion à quatre réacteurs.
2. Discuter suivant les valeurs de p du type d'appareil le plus sûr.

5 ★☆☆ ♥ **Loi hypergéométrique**

Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On en choisit 5 au hasard que l'on aligne afin de former un mot de 5 lettres et X est le nombre de voyelles dans ce mot. Loi de X ?

6 ★☆☆ ♡

On considére une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire, et on procède à l'expérience suivante : on effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne et à chaque pas du tirage on replace dans l'urne la boule tirée en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur que la boule obtenue.
On note X_n la variable aléatoire « nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages ».

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ?
2. Déterminer la loi de X_1 et celle de X_2.
3. Démontrer que X_n suit une loi uniforme.

Espérance et variance

7 ☆☆☆

Une urne contient 1 boule marquée 1, 2 boules marquées 2,..., n boules marquées n. On tire une boule de l'urne au hasard et on note X le résultat obtenu. Trouver sa loi et son espérance.

8 ★☆☆ ♥

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n urnes $U_1, \dots, U_n$ telles que, pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, l'urne U_i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. On choisit une urne au hasard, de laquelle on tire une boule. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne sachant que la boule tirée est blanche. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

9 ☆☆☆

Une urne contient 11 boules numérotées de 0 à 10. On tire deux boules simultanément.
On appelle M (respectivement m) le plus grand (respectivement le plus petit) des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi et l'espérance de M.
2. Mêmes questions pour m. Aurait-on pu déduire ces résultats de la question 1 ?

10 ★☆☆ Ⓐ ♥ Marche aléatoire

Un point M se déplace sur un axe d'origine O. Au départ, il est en O. Puis il effectue des sauts indépendants, d'une unité : vers la droite avec la probabilité p, vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. On considère la variable aléatoire X_n égale à l'abscisse du point M à l'issue du n-ème déplacement.
On note également D_n (respectivement G_n) le nombre de déplacements effectués par le point vers la droite (respectivement vers la gauche).

1. Donner les lois de D_n et G_n, leurs espérances et leurs variances.
2. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Trouver la loi de X_n.

11 ★☆☆ Ⓐ ♡

Dans une urne, il y a n jetons blancs et m jetons noirs. On pose $N = n + m$. On les extrait successivement sans remise et on note X le rang du dernier jeton blanc obtenu.

1. Quel est l'ensemble des valeurs possibles de X ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
3. En déduire que $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$. Retrouver ce résultat par calcul direct.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$.

12 ★★☆ Ⓐ

On étudie une population d'insectes. Chaque année, chaque insecte de cette population pond N œufs, qui éclot et donne alors un descendant avec la probabilité $p \in [0\,,1]$. On suppose qu'initialement, la population est constitué d'un insecte. On note X_n le nombre d'insectes à la génération g_n (et donc X_0 est la variable aléatoire certaine égale à 1). On pose $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Calculer u_0, u_1 et u_2. Puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (pu_n + 1 - p)^N$.
3. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente.

Exercices théoriques

13 ☆☆☆ ♥

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0\,,n]\!]$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k)$.

14 ★★☆ Ⓐ Les moments caractérisent la loi

Soient X et Y deux variables aléatoires finies.
Montrer que X et Y ont même loi si, et seulement si, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$.

Série génératrice (spé)

15 ★☆☆ ♡

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0\,,1[$.
Un cavalier a n haies à sauter numérotées de 1 à n. Il s'arrête au premier saut non réussi. On suppose que, s'il se présente devant la k-ème haie, la probabilité pour qu'il réussisse son saut est $q = 1 - p$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de sauts réussis (on notera $X = 0$ s'il échoue à la première haie).
On définit la *série génératrice* de X en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} t^x\, \mathbb{P}(X = x)$.

1. Déterminer la loi de X. Vérifier que c'est bien une loi de probabilité.
2. Calculer $G_X(1)$, justifier que G_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.
3. Expliciter $G_X(t)$ pour tout $t \in [0\,,1]$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$ puis sa limite quand $n \to +\infty$.

Utilisation de va auxiliaires

16 ☆☆☆ Ⓐ

Un dé équilibré a une face numérotée 1, trois faces numérotées 2, et deux faces numérotées 3. On lance une fois le dé. On note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

1. Donner sa loi, son espérance et sa variance.
2. Donner l'espérance de la somme Y des numéros obtenus lors de trois lancers successifs.

17 ★☆☆ Ⓐ ♥ **Mines-Telecom MP 21**

Soient $n, a \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boîtes dans lesquelles sont répartis na jetons identiques de manière aléatoire et indépendante.
On note X_n le nombre de boîtes vides et Y_i la variable aléatoire de Bernoulli valant 1 si la boîte numéro i est vide.
À l'aide des Y_i, calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ en fonction de n, puis sa limite quand $n \to +\infty$.

18 ★★☆ Ⓐ

François prend le TGV et s'installe en premier dans un wagon de N places sans avoir réservé son billet. Les passagers ayant réservé une place entrent un à un. Si François occupe la place de l'un d'entre eux, alors il se déplace à une autre place (choix au hasard parmi les places libres restantes). On considère que la place du voyageur entrant suit une loi uniforme parmi les places libres.

1. k voyageurs étant installés, quelle est la probabilité que le $(k+1)$-ème ait sa place place occupée par François ?
2. k voyageurs étant installés, quelle est la probabilité que François se soit déplacé : (a) à chaque fois ? (b) jamais ?
3. Écrire une fonction Python qui, N et k étant donnés, renvoie le nombre de déplacements de François.
4. Donner l'espérance du nombre de déplacements de François après que le k-ème voyageur se soit installé.
5. Le wagon est finalement plein, et François effectue un dernier déplacement pour finir debout. Quelle est l'espérance du nombre de déplacements ? Écrire un programme Python simulant cette espérance.
6. Déterminer un équivalent du nombre de déplacements lorsque $N \to +\infty$.

Caractérisation des va

19 ☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\forall k \in [\![1\,, n-1]\!]\,,\ \mathbb{P}[X = k] = \dfrac{k.k!}{n!}$ et $\mathbb{P}[X = n] = \dfrac{1}{n!}$. Vérifier que l'on définit bien ainsi une variable aléatoire.

Va fonction d'une va

20 ☆☆☆ ♥

On donne dans le tableau suivant la loi d'une variable aléatoire X.

k	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$2a$	a	a	$3a$	a	$2a$

1. Donner la valeur de a.
2. Calculer $\mathbb{P}(\lvert X \rvert \leqslant 1)$ et $\mathbb{P}(X^2 < 5X)$.
3. Déterminer la loi de $\lvert X - 1 \rvert$ puis de e^X.

21 ☆☆☆ Ⓐ ♡

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0\,,1[$. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

22 ☆☆☆

Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[\![0\,,2n]\!]$. Donner la loi et l'espérance de $Z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}X\right)$.

23 ★☆☆ Ⓐ ♥

X est une variable aléatoire qui suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$. Le résultat de X est sur un compteur détraqué :

- si $X = 0$, un nombre au hasard entre 1 et n est affiché ;
- sinon, le résultat de X est sur le compteur.

Soit Y le nombre inscrit sur le compteur. Calculer la loi de Y et $\mathbb{E}(Y)$.

Inégalités probabilistes

24 ☆☆☆

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $[a\,,b]$.
Montrer que : $\forall c \in]a\,,b[,\ \dfrac{\mathbb{E}(X)-c}{b-c} \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant c) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)-a}{c-a}$.

25 ★☆☆ ♥

On lance n fois un dé à 6 faces. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une valeur de n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris, au sens strict, entre 0 et $\dfrac{n}{3}$ soit supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$; puis à $0,9$.

26 ★★☆ Ⓐ ♡

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit X une variable aléatoire finie telle que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}$.

Indications

6 - indication 3. Récurrence.

10 - indication 2. Observer $D_n - G_n$ et $D_n + G_n$.

11 - indication 3. Relier les événements $(X \leqslant k)$, $(X \leqslant k-1)$ et $(X = k)$.

12 - indication 2. FPT, SCE relatif à X_1. 3. $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

14 - indication $\boxed{\Longleftarrow}$ Observer la relation matricielle qui découlent des relations $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$ pour $k \in [\![0\,,n]\!]$ pour $n = |X(\Omega) \cup Y(\Omega)|$.

15 - indication 1. Isoler le calcul de $\mathbb{P}(X = n)$. 2. G_X est un polynôme !

16 - indication 2. Exprimer Y en fonction de va de même loi que X.

17 - indication Trouver la loi de Y_i puis voir que $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

18 - indication 4. Introduire la va de Bernoulli valant 1 si François doit se déplacer lors de l'entrée du i-ème voyageur, 0 sinon. 6. Sommes de Riemann.

21 - indication Théorème de transfert et absorber le $\dfrac{1}{k+1}$ dans le coefficient binomial.

22 - indication Disjonction de cas selon la parité de n.

23 - indication FPT, SCE relatif à X.

26 - indication Observer que $(X \geqslant 2\lambda) \subset ((X - \lambda + 1)^2 \leqslant (\lambda+1)^2)$.

Solutions

1 - solution L'expérience consiste à étaler les billets extraits de l'urne, devant nous, en regard d'un numéro de $[\![1\,,n]\!]$. Il n'y a qu'un seul billet gagnant, le choix du numéro associé se fait donc au hasard : $X \sim \mathcal{U}([\![1\,,n]\!])$.
Plus « rigoureusement », on peut noter G_i l'événement « obtenir le billet gagnant au rang i » et calculer, à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1\,,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(\overline{G_1}\cap\overline{G_2}\cap\cdots\cap\overline{G_{k-2}}\cap\overline{G_{k-1}}\cap G_k)\\ &= \mathbb{P}(\overline{G_1})\,\mathbb{P}_{\overline{G_1}}(\overline{G_2})\cdots\mathbb{P}_{\overline{G_1}\cap\cdots\cap G_{k-2}}(\overline{G_{k-1}})\,\mathbb{P}_{\overline{G_1}\cap\cdots\cap G_{k-1}}(G_k)\\ &= \frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\,\frac{1}{n-(k-1)}\\ &= \frac{1}{n}\quad\text{par télescopage.}\end{aligned}$$

2 - solution $\mathscr{B}\left(3,\frac{1}{2}\right)$.

3 - solution $\mathscr{B}\left(100,\frac{1}{10}\right)$.

4 - solution
1. Si $n\in\mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de réacteurs en état de fonctionnement sur un avion à n réacteurs : on reconnaît que $X_n\sim\mathscr{B}(n,1-p)$. Pour un avion ayant n réacteurs, la probabilité qu'il termine son vol sans s'écraser est $\mathbb{P}\left(X_n\geqslant\frac{n}{2}\right)$; la probabilité qu'il tombe en panne est donc $\mathbb{P}\left(X_n<\frac{n}{2}\right)$.
   - ➢ Si $n=2$, on obtient $p_2=\mathbb{P}(X_2<1)=\mathbb{P}(X_2=0)=p^2$.
   - ➢ Si $n=4$, on obtient $p_4=\mathbb{P}(X_4<2)=\mathbb{P}(X_4=0)+\mathbb{P}(X_4=1)=p^4+4p^3(1-p)$.
2. Le bimoteur est plus sûr que le quadrimoteur si, et seulement si, $p_2<p_4$. Or,

$$\begin{aligned}p_2<p_4 &\iff 1<p^2+4p(1-p)\quad\text{car } p^2>0,\\ &\iff 3p^2-4p+1<0.\end{aligned}$$

   L'étude de ce polynôme du second degré permet d'écrire que :
   - ➢ le bimoteur est plus sûr que le quadrimoteur si, et seulement si, $p\in\left]\frac{1}{3},1\right[$;
   - ➢ si $p=\frac{1}{3}$, les deux appareils sont aussi sûrs l'un que l'autre ;
   - ➢ le quadrimoteur est plus sûr que le bimoteur si, et seulement si, $p\in\left]0,\frac{1}{3}\right[$.

5 - solution ➢ $X(\Omega)=[\![0\,,5]\!]$.

➢ Soit $k\in[\![0\,,5]\!]$. $\mathbb{P}(X=k)=\frac{|(X=k)|}{|\Omega|}$.
Ω désigne l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 26 lettres du sac. $|\Omega|=\binom{26}{5}$.
Calcul de $|(X=k)|$ par PM.
- ✧ Choix des k voyelles : $\binom{6}{k}$ possibilités.
- ✧ Choix des $5-k$ consonnes : $\binom{20}{5-k}$ possibilités.

Ainsi, $|(X=k)|=\binom{6}{k}\binom{20}{5-k}$. D'où $\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{6}{k}\binom{20}{5-k}}{\binom{26}{5}}$.
Cette loi est connue sous le nom de loi *hypergéométrique* (HP MPSI).

6 - solution
1. $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$.
2. $X_1\sim\mathcal{U}([\![0,1]\!])$. $((X_1=0),(X_1=1))$ est un système complet d'événements non négligeables, donc la formule des probabilités totales permet de trouver $X_2\sim\mathcal{U}([\![0,2]\!])$.
3. On procède par récurrence sur n. L'initialisation est assurée par la question précédente. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $X_n\sim\mathcal{U}([\![0,n]\!])$. Soit $k\in[\![0,n+1]\!])$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_n=k))_{k\in[\![0,n]\!]}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=k) &= \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X_{n+1}=k|X_n=i)\,\mathbb{P}(X_n=i)\\ &= \mathbb{P}(X_{n+1}=k|X_n=k-1)\frac{1}{n+1}+\mathbb{P}(X_{n+1}=k|X_n=k)\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{k}{n+2}\,\frac{1}{n+1}+\frac{n+1-k}{n+2}\,\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

   Ainsi l'hérédité est prouvée.

7 - solution $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)=\frac{2k}{n(n+1)}$.
$\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\,\mathbb{P}(X=k)=\frac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3}$.

8 - solution On cherche $\mathbb{P}_B(X=i)$, où B est l'événement « la boule tirée est blanche » et $i\in[\![1\,,n]\!]$. On calcule $\mathbb{P}(B)$ grâce au système complet $((X=k),\ k\in\mathbb{N})$:

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{(X=k)}(B)\,\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$$

Puis :

$$\mathbb{P}_B(X=i)=\frac{\mathbb{P}((X=i)\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}_{(X=i)}(B)\,\mathbb{P}(X=i)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\frac{i}{n}\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{2n}}=\frac{2i}{n(n+1)}.$$

9 - solution

1. $M(\Omega)=[\![1\,,10]\!]$. Soit $i\in[\![1\,,10]\!]$.
   - Choix de Ω : ensemble des 2 cominaisons d'éléments de $[\![0\,,10]\!]$. $|\Omega|=\binom{11}{2}=55$.
   - Dénombrons $|(M=i)|$ par PM :
     - choix du jeton i : 1 seule possibilité.
     - choix de la valeur de l'autre jeton : toutes les valeurs $0,\ldots,i-i$ sont possibles, i possibilités.

   Ainsi, $\mathbb{P}(M=i)=\frac{i}{55}$.
   $\mathbb{E}(M)=\sum\limits_{i=1}^{10}i\,\mathbb{P}(M=i)=\frac{1}{55}\frac{10.11.21}{6}=7$.
2. Même démarche. $m(\Omega)=[\![0\,,9]\!]$. Soit $i\in[\![0\,,9]\!]$.
   - Même choix de Ω.
   - Dénombrons $|(m=i)|$ par PM :
     - choix du jeton i : 1 seule possibilité.
     - choix de la valeur de l'autre jeton : toutes les valeurs $i+1,\ldots,10$ sont possibles, $10-i$ possibilités.

   Ainsi, $\mathbb{P}(m=i)=\frac{(10-i)}{55}$.
   $\mathbb{E}(m)=\frac{1}{55}\sum\limits_{i=0}^{9}i(10-i)=\frac{1}{55}\left(10\sum\limits_{i=0}^{9}i-\sum\limits_{i=0}^{9}i^2\right)=\frac{1}{55}\left(\frac{10.9.10}{2}-\frac{9.10.19}{6}\right)=\frac{1}{55}\frac{9.10.(30-19)}{6}=3$.
   On aurait pu déduire ces résultats de la question 1 car le minimum et le maximum des deux numéros obtenus jouent des rôles globalement symétriques par rapport au milieu de l'intervalle d'entiers $[\![0\,,10]\!]$. Autrement dit, $m\sim 10-M$.

10 - solution

1. D_n est le nombre de succès (un succès est un déplacement vers la droite) dans une succession de n épreuves de Bernoulli de même paramètre p : on reconnaît que $D_n\sim\mathscr{B}(n,p)$.
   On peut donner directement $\mathbb{E}(D_n)=np$ et $\mathbb{V}(D_n)=npq$.
   On observe de même que $G_n\sim\mathscr{B}(n,q)$, $\mathbb{E}(G_n)=nq$ et $\mathbb{V}(G_n)=npq$.
2. On a clairement $X_n=D_n-G_n$. Par linéarité : $\mathbb{E}(X_n)=\mathbb{E}(D_n)-\mathbb{E}(G_n)=n(p-q)$.
   Attention : la variance n'est pas linéaire...
   On observe que $n=D_n+G_n$. Ainsi $X_n=2D_n-n$ donc $\mathbb{V}(X_n)=4\,\mathbb{V}(D_n)=4npq$.
3. Les valeurs possibles de X_n sont dans $[\![-n,n]\!]$; en fait, les valeurs possibles sont exactement les nombres de $[\![-n,n]\!]$ ayant même parité que n. Soit k un tel nombre. On a :

$$\mathbb{P}(X_n=k)=\mathbb{P}(2D_n-n=k)=\mathbb{P}\left(D_n=\frac{k+n}{2}\right)=\binom{n}{\frac{n+k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}.$$

   Remarquons que, k ayant même parité que n, $\frac{n+k}{2}$ et $\frac{n-k}{2}$ sont des entiers...

11 - solution

1. On choisit comme univers Ω l'ensemble des b-combinaisons des rangs auxquels on a obtenu les jetons blancs : $|\Omega|=\binom{N}{n}$. Si $k\in[\![n\,,N]\!]$, $(X\leqslant k)$ est l'événement « les rangs des jetons blancs sont dans $[\![1\,,k]\!]$ », donc $|(X\leqslant k)|=\binom{k}{n}$. De fait, $\mathbb{P}(X\leqslant k)=\frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}$.
2. - *Calcul à l'aide de la question 1.* On a $X(\Omega)=[\![n\,,N]\!]$. On est dans la situation où l'on connaît la « fonction de répartition » de X (en tout cas, on la connaît en tout point du support, c'est la question 1) et où l'on cherche sa loi. On a :

✧ $\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(X\leqslant n)=\frac{1}{\binom{N}{n}}$;

✧ $\forall k\in[\![n+1\,,N]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X\leqslant k)-\mathbb{P}(X\leqslant k-1)=\frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}-\frac{\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}}$. *Formule encore valable pour $k=n$, d'ailleurs.*

La formule de Pascal permet de conclure quant à la formule souhaitée.

➣ *On peut retrouver ce résultat de manière directe, en reprenant la modélisation proposée à la question précédente.* Le cardinal de $(X=k)$ se calcule par principe multiplicatif :

✧ choix du k-ème jeton : le dernier jeton blanc, 1 possibilité ;

✧ choix des positions des autres jetons blancs : $\binom{k-1}{n-1}$ possibilités.

Donc $|(X=k)|=\binom{k-1}{n-1}$, d'où le résultat.

3. D'après la formule de Pascal, $\binom{k}{n}=\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}$. On reconnaît alors une somme télescopique :

$$\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}=\sum_{k=n}^{N}\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}=\binom{N+1}{n+1}-\binom{n}{n+1}=\binom{N+1}{n+1}.$$

Puis :

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=n}^{N}k\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=n}^{N}k\binom{k-1}{n-1}=\frac{n}{\binom{N}{n}}\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}=\frac{n}{\binom{N}{n}}\binom{N+1}{n+1}=\frac{n(N+1)}{n+1}.$$

12 - solution 1. À la génération g_0, on a un insecte, qui pond donc N œuf. Ces N œufs donnent ou non un descendant ; en appelant succès le fait pour un œuf donné de donner un descendant, on constate que X_1 désigne le nombre de succès dans une succession de N épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Ainsi $X_1\sim\mathscr{B}(n,p)$, $\mathbb{E}(X_1)=np$, $\mathbb{V}(X_1)=npq$.

2. ➣ Clairement : $u_0=0$, $u_1=\mathbb{P}(X_1=0)=q^N$.

➣ FPT, SCE relatif à X_1 : $u_2=\mathbb{P}(X_2=0)=\sum\limits_{k=0}^{N}\mathbb{P}_{(X_1=k)}(X_2=0)\,\mathbb{P}(X_1=k)$.

Sachant qu'à la génération g_1, il y a k insectes, ces oiseaux-là pondent chacun N œufs ; pour que $(X_2=0)$, il faut et il suffit que tous ces œufs ne donnent aucun descendant. Ainsi :

$$u_2=\sum_{k=0}^{N}q^{kN}\binom{N}{k}p^kq^{N-k}=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(pq^N)^kq^{N-k}.$$

D'après la formule du binôme de Newton, $u_2=(pq^N+q)^N$.

➣ Soit $n\in\mathbb{N}$. Même argument (SCE relatif à X_1) :

$$u_{n+1}=\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}_{(X_1=k)}(X_{n+1}=0)\,\mathbb{P}(X_1=k).$$

Or, $\mathbb{P}_{(X_1=k)}(X_{n+1}=0)=\mathbb{P}(X_n=0)^k=u_n^k$ car la situation revient à considérer que l'on a initialement k œufs, et que pour chacun d'entre eux, on ne veut aucun descendant après n générations.

Ainsi, $u_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{N}u_n^k\binom{N}{k}p^kq^{N-k}=\sum\limits_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(pu_n)^kq^{N-k}=(pu_n+q)^N$.

3. En tant que probabilité, $u_n\in[0\,,1]$. Si $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=(pu_n+q)^N-u_n\geqslant(pu_n+q)^N-u_n^N=(pu_n+q-u_n)\sum_{k=0}^{N-1}(pu_n+q)^ku_n^{N-1-k}.$$

La somme est $\geqslant 0$, et $pu_n+q-u_n=q(1-u_n)\geqslant 0$. De fait, $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$. Donc (u_n) est croissante. Étant majorée, elle converge vers une certaine limite ℓ vérifiant $\ell=(p\ell+q)^N$.

13 - solution M1 On écrit $\mathbb{P}(X\geqslant k)=\sum\limits_{h=k}^{n}\mathbb{P}(X=h)$ de sorte que :

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=k}^{n}\mathbb{P}(X=h)=\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{h}\mathbb{P}(X=h)=\sum_{h=1}^{n}h\,\mathbb{P}(X=h)=\mathbb{E}(X)$$

car $0\,\mathbb{P}(X=0)=0$.

$\boxed{\text{M2}}$ On écrit $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X\geqslant k)-\mathbb{P}(X\geqslant k+1)$, si bien que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\,(\mathbb{P}(X\geqslant k)-\mathbb{P}(X\geqslant k+1))\\
&= \sum_{k=0}^{n} (k\,\mathbb{P}(X\geqslant k)-(k+1)\,\mathbb{P}(X\geqslant k+1))+\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k+1)\\
&= -(n+1)\,\mathbb{P}(X\geqslant n+1)+\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(X\geqslant k) \quad \text{par télescopage et changement d'indice,}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k) \quad \text{car } \mathbb{P}(X\geqslant n+1)=0.
\end{aligned}$$

14 - solution $\boxed{\Longrightarrow}$ Évident.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Déjà, on peut supposer $X(\omega)=Y(\omega)$ (en ajoutant les éléments manquants dans l'un ou l'autre, avec une probabilité nulle).

Notons cet ensemble : $X(\Omega)=\{a_0,\dots,a_n\}$ avec $n\in\mathbb{N}$, les a_i étant distincts.

Si $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^k)=\mathbb{E}(Y^k)\iff \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^k[\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)]=0$.

Ainsi, ces relations pour $k\in[\![0,n]\!]$ conduisent à la relation matricielle $AZ=0$ en posant $A=(a_i^k)_{0\leqslant i,k\leqslant n}$ et Z la matrice de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ de terme général $\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)$. On observe que A est la matrice de Vandermonde associée aux a_i, qui sont distincts : elle est donc inversible ($\det(A)\neq 0$) ce qui entraîne que $Z=0$. Autrement dit, X et Y ont même loi.

15 - solution

1. On a $X(\Omega)=[\![0\,,n]\!]$. Pour tout $i\in[\![1\,,n]\!]$, on définit l'événement H_i : « le cavalier réussit son i-ème saut ». Si $k\in[\![0\,,n-1]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(H_1\cap H_2\cap\cdots\cap H_k\cap\overline{H_{k+1}}).$$

Formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(H_1)\,\mathbb{P}(H_2|H_1)\cdots\mathbb{P}(\overline{H_{k+1}}|H_1\cap\cdots\cap H_k)=q^kp.$$

On calcule séparément $\mathbb{P}(X=n)$ puisque $(X=n)$ se réalise lorsque le cavalier à réussit tous ses sauts :

$$\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(H_1\cap\cdots\cap H_n)=q^n.$$

On vérifie que $\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$:

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)+\mathbb{P}(X=n)=p\sum_{k=0}^{n-1}q^k+q^n=p\frac{1-q^n}{1-q}+q^n=1$$

car on reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique et car $\frac{p}{1-q}=\frac{p}{p}=1$.

2. $G_X(1)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$.

   En tant que polynôme, G_X est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall t\in\mathbb{R}$, $G_X'(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}kt^{k-1}\,\mathbb{P}(X=k)$.

   De fait, $G_X'(1)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\,\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{E}(X)$.

3. Si $t\in[0\,,1]$, $tq\neq 1$ donc :

$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{n-1}t^kq^kp+t^nq^n=p\sum_{k=0}^{n-1}(tq)^k+(tq)^n=p\frac{1-(tq)^n}{1-tq}+(tq)^n.$$

Ainsi $G_X'(t)=p\frac{-nt^{n-1}q^n(1-tq)+q(1-t^nq^n)}{(1-tq)^2}+nt^{n-1}q^n$. Donc $\mathbb{E}(X)=G_X'(1)=\frac{q(1-q^n)}{p}$. Pour finir, $\mathbb{E}(X)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{q}{p}$.

16 - solution 1. On dresse sans problème le tableau de la loi de X :

k	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Puis $\mathbb{E}(X) = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{3} = \frac{13}{6}$. Par théorème de transfert, $\mathbb{E}(X^2) = 1^2.\frac{1}{6} + 2^2.\frac{1}{2} + 3^2.\frac{1}{3} = \frac{31}{6}$.
Le théorème de Huygens-König permet de conclure que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{17}{36}$.

2. Notons, pour $i \in [\![1,3]\!]$, X_i la variable aléatoire égale au nombre obtenu lors du i-ème tirage : X_i a même loi que X donc $\mathbb{E}(X_i) = \frac{13}{6}$.
De plus, $Y = X_1 + X_2 + X_3$, donc par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = \frac{13}{2}$.

17 - solution ➢ Loi de Y_i : c'est une va de Bernoulli, il suffit de déterminer $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{|(Y_i=1)|}{|\Omega|}$.
Ω : ensemble des na-listes des numéros des boîtes où on met chacun des n jetons.
Alors $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{(n-1)^{na}}{n^{na}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{na}$.

➢ Puis $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et, par linéarité, $\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}$.
Classiquement : $\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^a = \mathrm{e}^{-a}$.

18 - solution 1. $\frac{1}{N-k}$.

2. (a) $\frac{1}{N.(N-1)\ldots(N-k+1)} = \frac{(N-k)!}{N!}$.
   (b) $\frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1}\cdots\frac{N-k}{N-k+1} = \frac{N-k}{N} = 1 - \frac{k}{N}$.
3.
4. Posons $X_i = 1$ si François doit se déplacer lors de l'entrée du i-ème voyageur, 0 sinon. $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{N-i+1}$ selon 1. Ainsi $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{N-i+1}$. Soit S_k la va égale au nombre de déplacements de François après que les k premiers voyageurs se soient installés. $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ donc $\mathbb{E}(S_k) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{N-i+1}$.
5. Le nombre de déplacements est S_N. $\mathbb{E}(S_N) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N-i+1}$.
6. $S_N = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N-i+1} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} \sim \ln(N)$ (sommes de Riemann).

19 - solution D'une part, tous les $\mathbb{P}[X=k]$ sont positifs ou nuls. D'autre part :

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k.k!}{n!} + \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{((k+1)-1).k!}{n!} + \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(k+1)!}{n!} - \frac{k!}{n!}\right) + \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = 1$$

par télescopage.

20 - solution 1. Pour que X soit une variable aléatoire, il faut et il suffit que les nombres $\mathbb{P}(X=k)$ sont positifs ou nuls et de somme 1. Cela revient à choisir a tel que $a \geqslant 0$ et $2a + a + a + 3a + a + 2a = 1$: seul $a = \frac{1}{10}$ convient.

2. Si $x \in \mathbb{R}$, on a : $|x| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$. Par conséquent, on a les égalités des événements :
$$(|X| \leqslant 1) = (-1 \leqslant X \leqslant 1) = (X=-1)\cup(X=0)\cup(X=1).$$
Par incompatibilité, $\mathbb{P}(|X|\leqslant 1) = \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$.
On a de même $(X^2 \leqslant 5X) = (0 < X < 5) = (X \geqslant 1)$, donc $\mathbb{P}(X^2 < 5X) = \frac{3}{5}$.
3. Notons $Y = |X-1|$. $Y(\Omega) = [\![0\,,3]\!]$. On observe que :
   - ➢ $(Y=0) = (|X-1| = 0) = (X-1=0) = (X=1)$;
   - ➢ $(Y=1) = (|X-1|=1) = (X-1=1)\cup(X-1=-1) = (X=2)\cup(X=0)$;
   - ➢ $(Y=2) = (X=-1)\cup(X=3)$;
   - ➢ $(Y=3) = (X=-2)$.

   On dresse alors le tableau de loi suivant.

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$3a$	$2a$	$3a$	$2a$

Comme la fonction exponentielle est bijective, tous les éléments de $X(\Omega)$ ont des images distinctes par l'exponentielle, ce qui permet de dresser le tableau de loi suivant.

k	e^{-2}	e^{-1}	1	e	e^2	e^3
$\mathbb{P}(\mathrm{e}^X=k)$	$2a$	a	a	$3a$	a	$2a$

21 - solution Théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^kq^{n-k}=\frac{1}{(n+1)p}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^kq^{n+1-k}=\frac{1-q^{n+1}}{(n+1)p}.$$

22 - solution $Z(\Omega)=\{-1,0,1\}$.

- Supposons $n\in 2\,\mathbb{N}$: on pose $n=2p$ avec $p\in\mathbb{N}$.
  - $\mathbb{P}(Z=-1)=\mathbb{P}(X\in\{4k+2,\ k\in[\![0\,,p-1]\!]\})=\frac{p}{4p+1}$. De même, $\mathbb{P}(Z=1)=\frac{p+1}{4p+1}$. Et $\mathbb{P}(Z=0)=\frac{2p}{4p+1}$.
  - Puis $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{4p+1}=\frac{1}{2n+1}$.
- Sinon, $n\notin 2\,\mathbb{N}$ donc il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p+1$.
  - Même démarche : $\mathbb{P}(Z=-1)=\frac{p+1}{4p+3}$, $\mathbb{P}(Z=1)=\frac{p+1}{4p+3}$, $\mathbb{P}(Z=0)=\frac{2p+1}{4p+1}$.
  - Puis $\mathbb{E}(Z)=0$.

23 - solution $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$.

M1 FPT, SCE relatif à X : $\mathbb{P}(Y=k)=\sum\limits_{i=0}^{n}\mathbb{P}_{(X=i)}(Y=k)\,\mathbb{P}(X=i)=\frac{1}{n}\,\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}q^n+\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$.

M2 FPT, SCE $(X=0,X\neq 0)$:
$\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(Y=k,X=0)+\mathbb{P}(Y=k,X\neq 0)=\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}_{(X=0)}(Y=k)+\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}q^n+\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$.

M3 $(Y=k)=(X=k)\cup(X=0\cap Y=k)$ donc...

$\mathbb{E}(Y)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\,\mathbb{P}(Y=k)=\frac{1}{n}q^n\sum\limits_{k=1}^{n}k+\sum\limits_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\frac{n+1}{2}q^n+np$.

24 - solution Soit $c\in\,]a\,,b[$.

- $X-a$ est à valeurs positives et $c-a>0$, donc l'inégalité de Markov s'applique :

$$\mathbb{P}(X\geqslant c)=\mathbb{P}(X-a\geqslant c-a)\leqslant\frac{\mathbb{E}(X-a)}{c-a}\leqslant\frac{\mathbb{E}(X)-a}{c-a}.$$

- $b-X$ est à valeurs positives et $b-c>0$, donc l'inégalité de Markov s'applique :

$$\mathbb{P}(X\leqslant c)=\mathbb{P}(b-X\geqslant b-c)\leqslant\frac{\mathbb{E}(b-X)}{b-c}\leqslant\frac{b-\mathbb{E}(X)}{b-c}.$$

D'où $\mathbb{P}(X>c)=1-\mathbb{P}(X\leqslant c)\geqslant\frac{\mathbb{E}(X)-c}{b-c}$. Comme $(X>c)\subset(X\geqslant c)$, on a encore $\mathbb{P}(X\geqslant c)\geqslant\frac{\mathbb{E}(X)-c}{b-c}$.

25 - solution Notons X la variable alétoire égale au nombre de 6 obtenus lors de l'expérience. On a $X\sim\mathscr{B}\left(n,\frac{1}{6}\right)$, $\mathbb{E}(X)=\frac{n}{6}$ et $\mathbb{V}(X)=\frac{5n}{36}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que : $\forall\varepsilon>0$, $\mathbb{P}\left(\left|X-\frac{n}{6}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{5n}{36\varepsilon^2}$.
En choisissant $\varepsilon=\frac{n}{6}>0$, on a donc $\mathbb{P}\left(\left|X-\frac{n}{6}\right|\geqslant\frac{n}{6}\right)\leqslant\frac{5}{n}$, soit $1-\mathbb{P}\left(\left|X-\frac{n}{6}\right|<\frac{n}{6}\right)\leqslant\frac{5}{n}$, soit $\mathbb{P}\left(0<X<\frac{n}{3}\right)\geqslant 1-\frac{5}{n}$.

- Pour que $\mathbb{P}\left(0<X<\frac{n}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$, il suffit de choisir n tel que $1-\frac{5}{n}\geqslant\frac{1}{2}$, *i.e.* $n\geqslant 10$. Ainsi, $n=10$ convient (entre autres...).
- De même pour $\mathbb{P}\left(0<X<\frac{n}{3}\right)\geqslant 0,9$, il suffit de choisir n tel que $1-\frac{5}{n}\geqslant\frac{1}{10}$, *i.e.* $n\geqslant 50$. Ainsi, $n=50$ convient.

26 - solution On observe $(X\geqslant 2\lambda)=(X-\lambda+1\geqslant\lambda+1)\leqslant((X-\lambda+1)^2\subset(\lambda+1)^2)$. De fait :

$$\mathbb{P}(X\geqslant 2\lambda)\leqslant\mathbb{P}((X-\lambda+1)^2\leqslant(\lambda+1)^2).$$

Or, $(X-\lambda+1)^2$ est à valeurs positives et $(\lambda+1)^2>0$, donc l'inégalité de Markov s'applique :

$$\mathbb{P}((X-\lambda+1)^2 \leqslant (\lambda+1)^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}((X-\lambda+1)^2)}{(\lambda+1)^2}.$$

On calcule :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}((X-\lambda+1)^2) & = & \mathbb{E}(X^2)+\lambda^2+1-2\lambda\,\mathbb{E}(X)+2\,\mathbb{E}(X)-2\lambda \\
& = & \mathbb{V}(X)+\mathbb{E}(X)^2+\lambda^2+1-2\lambda\,\mathbb{E}(X)+2\,\mathbb{E}(X)-2\lambda \\
& = & \lambda+1.
\end{array}$$

On peut donc synthétiser : $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{\lambda+1}{(\lambda+1)^2} \leqslant \frac{1}{\lambda+1}$.