MATH

Intégration (2)

Exercices 25

Un brin de continuité

1 ★☆☆ ♥

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue ***ssi*** il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la suite $x_n - y_n \to 0$ et que la suite $(|f(x_n) - f(y_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit minorée par un réel strictement positif.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2 ☆☆☆

La fonction $x \mapsto x^2$ est-elle uniformément continue sur un segment $[0\,,1]$? Sur $[0\,,10]$? Sur $\mathbb{R}$?

3 ☆☆☆ **Centrale MP**

La fonction f définie par $f(0) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f(t) = \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est-elle continue par morceaux ?

4 ☆☆☆ Ⓐ

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f et g sont continues sur $[a, b]$, alors $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ aussi.
2. Reprendre la question précédente avec la continuité par morceaux.

5 ★★★ Ⓐ

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On note :

- ➢ $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a\,,b]\,,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a\,,b]$;
- ➢ $\mathrm{Esc}([a\,,b]\,,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles en escalier sur $[a\,,b]$;
- ➢ $\mathscr{C}^0_0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[a\,,b]$ et d'intégrale nulle sur $[a\,,b]$.

Montrer que $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a\,,b]\,,\mathbb{R}) = \mathrm{Esc}([a\,,b]\,,\mathbb{R}) \oplus \mathscr{C}^0_0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$.

Révisions de l'intégration et un peu plus...

6 ☆☆☆ Ⓐ ♥

1. Justifier que $(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner l'expression de $2X^3 - X + 3$ comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^3 - x + 3}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x$.

7 ☆☆☆

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}$ en posant $u = \sqrt{t^2+t+1} - t$.

8 ★☆☆ Ⓐ ✍

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$ et $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$.

9 ★★☆ Ⓐ **X-ESPCI**

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

10 ☆☆☆ ♥

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^0([0\,,1]\,,[0\,,1])$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$.

11 ☆☆☆ Ⓐ

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f \in \mathscr{C}([a\,,b]\,,\mathbb{R})$ telle que $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$. Montrer que f est de signe constant sur $[a\,,b]$.

12 ☆☆☆ Ⓐ ♥

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que l'application $\varphi : x \mapsto \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

13 ★★☆

On définit la fonction g par $g(y) = \int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $g(y) \geqslant y$. Pour quelle(s) valeur(s) de y cette inégalité est-elle stricte ?
2. L'inégalité large précédente est-elle valable sur $\mathbb{R}^{-*}$?
3. Déduire que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique réel, noté $f(x)$, tel que $\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.
5. Dresser le tableau de variations de f.

14 ★★☆ ♥

On définit la fonction g par $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier la monotonie de g.
2. Calculer la limite en $+\infty$.
3. (DL) En posant $u = \ln(t)$, calculer la limite de g en 1.
4. (Int géné) Calculer la limite de g en 0.
5. Justifier que g se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

15 ★☆☆

On définit la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et on note F sa primitive nulle en 0. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier la monotonie de F.
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer G' en fonction de F.
3. Montrer que G est continue en 0.
4. On admet qu'au voisinage de 0 : $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
   En déduire que G est dérivable en 0 et calculer $G'(0)$.
5. Trouver une équation différentielle satisfaite par G.

16 ★☆☆ ♥

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0, I_1, I_2.
2. Montrer que la suite (I_n) est monotone et convergente.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_{n+2} en fonction de I_n.
4. Déterminer la limite de la suite (I_n). *Proposer deux méthodes.*

17 ★★☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge et que sa limite est nulle.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_{n+1} en fonction de I_n.
3. Déterminer la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

18 ★★☆ ♥ Centrale MP 21

1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f \in \mathscr{C}^0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a\,,b]\,,\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe $c \in [a\,,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.
2. (Spé) Soit $f \in \mathscr{C}^0([0\,,\pi]\,,\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\ \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\ \mathrm{d}x$.

19 ★★☆ ✍

Soit $f \in \mathscr{C}^2([0\,,1]\,,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$, à déterminer, telles que :

$$\int_0^1 x^n f(x)\ \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

20 ★★☆ X-ESPCI MP 18

On considère une fonction $\rho \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, dérivable en tout point de $]1, +\infty[$, constante égale à 1 sur $[0, 1]$ et vérifiant :

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ x\rho'(x) + \rho(x-1) = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une unique fonction ρ ainsi définie.
2. Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$, $x\rho(x) = \displaystyle\int_{x-1}^x \rho(t)\ \mathrm{d}t$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\rho(x) > 0$.
3. Montrer que $\rho(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Sommes de Riemann

21 ☆☆☆ ♥

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

22 ☆☆☆ Ⓐ ♥

Trouver un équivalent simple de la suite u : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

23 ★☆☆

Trouver un équivalent simple de la suite u : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \sqrt{k(n-k)}$.

24 ☆☆☆ CCinP PC 21

1. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.
2. Trouver un équivalent simple quand $n \to +\infty$ de $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n (n+k)^{1/n}$.

25 ★☆☆ ♡

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k$.

1. Déterminer la limite ℓ de (u_n).
2. Montrer que $(x-y)\,\mathrm{e}^y \leqslant \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y \leqslant (x-y)\,\mathrm{e}^x$, pour $0 \leqslant y \leqslant x$.
3. On pose $I_{k,n} = \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\right)\ \mathrm{d}x$ pour tout $k \in [\![0\,,n-1]\!]$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0\,,n-1]\!]$, $\displaystyle\frac{1}{2n^2}\,\mathrm{e}^{k/n} \leqslant I_{n,k} \leqslant \frac{1}{2n^2}\,\mathrm{e}^{(k+1)/n}$.
   (b) En déduire un encadrement de $n(\ell - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis un équivalent simple de $\ell - u_n$.

26 ★★☆ ✍ Ⓐ

Soit $f \in \mathscr{C}([0\,,1]\,,\mathbb{R}^+)$. Déterminer la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

On pourra commencer par prouver que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.

Formules de Taylor globales

27 ☆☆☆ ♡

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\mathrm{e}^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{|x|}$.

28 ★☆☆ Ⓐ ♥

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

29 ☆☆☆ ♥

Montrer que : $\forall x \in [0\,,\pi],\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{120}$.

30 ★★☆ ♥ **Inégalité de Kolmogorov**

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$. Pour $k \in \{0,1,2\}$, on pose, lorsque cette quantité est finie : $M_k = \|f^{(k)}\|_\infty$.
On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$, de sorte que M_0 et M_2 existent. Le but de cette exercice est de montrer que M_1 est nécessairement bien définie et de le majorer à l'aide de M_0 et M_2.

1. Soit $(x,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.
   (a) Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f à l'ordre 1 sur $[x\,,x+h]$.
   (b) En déduire : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$.
2. En déduire que M_1 est bien définie et que $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.
3. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[x-h\,,x]$, montrer que $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

31 ★★☆ ♡ **Égalité de Taylor-Lagrange**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a\,,b]\,,\mathbb{R})$.

1. Justifier l'existence de $m = \min\{f^{(n+1)}(x),\ x \in [a\,,b]\}$ et $M = \max\{f^{(n+1)}(x),\ x \in [a\,,b]\}$.
2. Montrer que $\dfrac{m(b-a)^{n+1}}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \dfrac{M(b-a)^{n+1}}{n+1}$.
3. En déduire l'existence de $c \in [a\,,b]$ tel que $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

32 ★★★ Ⓐ **ENS PC 19**

Soit $f \in \mathscr{C}^2([-1\,,1]\,,\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t - 2f(0)\right| \leqslant \dfrac{\|f''\|_{\infty,[-1,1]}}{3}$.

33 ★★★

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$ et $\|f^{(n)}\|_\infty \leqslant M^n n!$.
Montrer que f est nulle sur $\left]-\dfrac{1}{M}\,,\dfrac{1}{M}\right[$, puis sur $\mathbb{R}$.

Indications

4 - indication Expliciter $f + g + |f - g|$.

5 - indication Si $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a\,,b]\,,\mathbb{R})$, poser e_f la fonction en escalier dénotant les « sauts » éventuels de f puis observer $f - e_f$.

6 - indication 1. En début d'année, lire la consigne sous la forme :
« trouver $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall X \in \mathbb{R},\ 2X^3 - X + 3 = a + b(X+1) + c(X+1)^2 + d(X+1)^3$. »

8 - indication Calculer $I - J$ et $I + J$. On pourra poser $x = \tan(t)$.

9 - indication Première intégrale : poser $u = \dfrac{\pi}{4} - x$. Deuxième : IPP puis changement de variable « naturel ».

11 - indication Observer $\displaystyle\int_a^b (|f| - f)$.

12 - indication Idée 1 : formules trigonométriques pour $\sin(xt) - \sin(yt)$. Idée 2 : IAF.

16 - indication 4. Passage à la limite dans la relation de récurrence. Ou majoration de tan sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

17 - indication 1. Inégalité classique sur ln. 4. Récurrence sur p.

18 - indication 1. Théorème des bornes atteintes à f. 2. On a dit spé !

19 - indication 2 IPP.

22 - indication Sommes de Riemann, comme dans le titre du paragraphe !

25 - indication 2. Inégalités des accroissements finis.

26 - indication Appliquer la fonction ln.

27 - indication ITL à l'ordre 2. Distinguer $x \geqslant 0$ et $x < 0$.

28 - indication FTL à $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

29 - indication FTRI à l'ordre 3 et 5.

30 - indication 1.b. Isoler $f'(x)$ dans 1.a. 2. Étudier la fonction de h issue du second membre de 2.b.

32 - indication Appliquer la FTRI à l'ordre 2 à $F : t \mapsto \int_0^t f$ sur $[0\,,x]$.

Solutions

1 - solution

1. Par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f non uniformément continuité. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\alpha = \frac{1}{n} > 0$, il existe $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.
On définit ainsi deux suites $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.
De plus, par encadrement, $|x_n - y_n| \to 0$. On a donc bien construit deux suites x et y telles que $x_n - y_n \to 0$ et $(|f(x_n) - f(y_n)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit minorée par un réel strictement positif.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \to 0$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.
Supposons par l'absurde : $\exists \alpha > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Or $x_n - y_n \to 0$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - y_n| < \alpha$. Alors x_n et y_n contredisent la relation précédente. Absurde.

2. Choix de $x_n = \sqrt{n\pi}$ et $y_n = \sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi}$ dans la question 1.

2 - solution $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,,1]$ et $[0\,,10]$; d'après le théorème de Heine, f est donc uniformément continue sur les segments $[0\,,1]$ et $[0\,,10]$.
Supposons f uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (|x - y| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon).$$

Soit donc α un tel réel strictement positif. Soit $n \in \mathbb{N}$: on fixe $x = n$ et $y = n + \frac{\alpha}{2}$. On a bien $|x - y| < \alpha$. Mais $|f(x) - f(y)| = \alpha n + \frac{\alpha^2}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est en contradiction avec l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3 - solution f n'a pas de limite en 0 donc f n'est pas continue par morceaux en 0...

4 - solution

1. $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ donc $\max(f, g)$ est une fonction continue par opérations algébriques sur les fonctions continues.
On fait de même pour $\min(f, g)$... Ou on observe que $\min(f, g) = -\max(-f, -g)$.
2. L'argumentation reste valable...

5 - solution

➢ Soit $f \in \mathrm{Esc}([a\,,b]\,,\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0_0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$. D'une part, f est en escalier et continue, donc elle est contante, égale à une certaine constante c. Comme elle est par ailleurs d'intégrale nulle, $c = 0$.
D'où $\mathrm{Esc}([a\,,b]\,,\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0_0([a\,,b]\,,\mathbb{R}) = \{0\}$.

➢ Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a\,,b]\,,\mathbb{R})$. Il existe donc une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a\,,b]$ adaptée ($n \in \mathbb{N}^*$).
On construit une fonction c continue de la façon suivante :

- sur $[a_0\,,a_1]$, c est le prolongement par continuité de $f|_{]a_0,a_1[}$;
- en supposant construite la fonction c sur $[a_0\,,a_k]$, on définit c sur $]a_k\,,a_{k+1}]$ comme le prolongement par continuité de $f|_{]a_k,a_{k+1}[} - \alpha$ où $\alpha = \lim\limits_{a_k^+} f|_{]a_k,a_{k+1}[} - \lim\limits_{a_k^-} c$.

Le procédé de récurrence assure que l'on a construit ainsi une fonction c continue sur $[a\,,b]$ (on a rectifié progressivement en supprimant les sauts) et il est clair que $f - c$ est en escalier (puisqu'elle est constante sur chaque $]a_k\,,a_{k+1}[$).
Notons ensuite $i = \displaystyle\int_a^b c$ puis posons $\tilde{c} = c - i$ et $\tilde{e} = f - c$. On vérifie que :

- $\tilde{e} \in \mathrm{Esc}([a\,,b]\,,\mathbb{R})$;
- $\tilde{c} \in \mathscr{C}^0_0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$;
- $f = \tilde{e} + \tilde{c}$.

On en déduit que $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a\,,b]\,,\mathbb{R}) = \mathrm{Esc}([a\,,b]\,,\mathbb{R}) + \mathscr{C}^0_0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$.

Bilan : $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a\,,b]\,,\mathbb{R}) = \mathrm{Esc}([a\,,b]\,,\mathbb{R}) \oplus \mathscr{C}^0_0([a\,,b]\,,\mathbb{R})$.

6 - solution

1. ➢ *Base : à reprendre après le chapitre espace vectoriel...* $(1, X + 1, (X + 1)^2, (X + 1)^3)$ est une famille libre (échelonnée en degré et ne contient pas le polynôme nul) de quatre vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$, qui est de dimension 4 : c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

➢ $2X^3 - X + 3 = 2(X+1)^3 - 6(X+1)^2 + 5(X+1) + 2$.

2. $I = 2\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - 6\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} + 5\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3} + 2\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^4} = 2\ln(2) - \frac{13}{24}$.

7 - solution $I = 2\int_1^{\sqrt{3}-1} \frac{du}{1-2u} = -\ln(2\sqrt{3}-3)$.

8 - solution ➢ $I - J = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(t)-\sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos(2t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6}$.

➢ $I + J = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$.

Posons $x = \tan(t)$, changement de variable $\mathscr{C}^1$ bijectif (strictement croissant) de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ dans $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Par ailleurs, $\cos(2t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Ainsi, $I + J = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

DES : $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, puis $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$.

Finalement, $I + J = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1-x} + \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$.

Bref, $I = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) + \frac{\pi}{12}$ et $J = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - \frac{\pi}{12}$.

9 - solution ➢ $u = \frac{\pi}{4} - x$: $I = \int_0^{\pi/4} \ln(2)\,\mathrm{d}u - I$, donc $I = \frac{\pi\ln(2)}{8}$.

➢ IPP : $I = [x\ln(1+\tan(x))]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} x\frac{1+\tan^2(x)}{1+\tan(x)}\,\mathrm{d}x$ puis changement de variable $u = \tan(x)$... $J = \frac{\pi\ln(2)}{4} - I = I$.

10 - solution *Analyse.* Soit $f \in \mathscr{C}([0\,,1]\,,[0\,,1])$. telle que $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$. On a donc $\int_0^1 f(1-f) = 0$. Or, comme f est à valeurs dans $[0\,,1]$, $f(1-f) \geqslant 0$, donc par stricte positivité, $f(1-f) = 0$. Ainsi, f est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Comme f est positive, on a classiquement comme seules possibilités $f = 0$ ou $f = 1$.
En effet, par l'absurde, si f prend les deux valeurs 0 et 1, d'après le TVI, f prend également la valeur $\frac{1}{2}$, absurde.
Synthèse. Ces deux fonctions sont clairement solutions.

11 - solution On peut supposer $\int_a^b f \geqslant 0$, quitte à changer f en $-f$.

L'hypothèse devient alors $\int_a^b f = \int_a^b |f|$, donc $\int_a^b (|f| - f) = 0$. Or, $|f| - f$ est continue et positive ou nulle sur $[a\,,b]$: d'après la contraposée du théorème de stricte positivité de l'intégrale, $|f| - f = 0$ *i.e.* $f = |f|$. Cela entraîne que f reste de signe positif sur $[a\,,b]$.

12 - solution Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par inégalité triangulaire : $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \int_a^b |f(t)||\sin(xt) - \sin(yt)|\,\mathrm{d}t$.

➢ *Idée 1 : formules trigonométriques.* On sait que $\sin(xt) - \sin(yt) = 2\cos\left(\frac{xt+yt}{2}\right)\sin\left(\frac{xt-yt}{2}\right)$, donc on majore $|\sin(xt) - \sin(yt)| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{xt-yt}{2}\right)\right| \leqslant |t||x-y|$.

➢ *Idée 2 : IAF.* On sait que sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a, b]$ et $|\sin'| = |\cos| \leqslant 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $|\sin(xt) - \sin(yt)| \leqslant |xt - yt| \leqslant |t||x-y|$.

Dans les deux cas, on a obtenu la même inégalité, qui permet d'écrire : $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |x-y|\int_a^b |tf(t)|\,\mathrm{d}t$. En notant $k = \int_a^b |tf(t)|\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^+$, on peut donc conclure que φ est k-lipschitzienne.
Remarque. De nombreux ouvrages considère que la constante k doit être dans $\mathbb{R}^{+*}$; mais si $k = 0$, c'est que φ est nulle et elle est donc bien lipschitzienne « quand même » : 1-lipschitzienne par exemple...

13 - solution 1. On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{t^2} \geqslant 1$. Par croissance de l'intégrale, si $y \geqslant 0$, on a $g(y) \geqslant \int_0^y \mathrm{d}t \geqslant y$.
Si $y = 0$, on a clairement $g(y) = 0 = y$.
Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$. On a $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathrm{e}^{t^2} - 1 > 0$, donc par théorème de stricte positivité, $g(y) - y = \int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t > 0$, donc $g(y) > y$.
Bref, l'inégalité précédente est stricte ***ssi*** $y > 0$.

2. Le même argument que dans la question 1 permet de montrer que si $y \leqslant 0$, $g(y) \leqslant y$ et que cette inégalité est stricte dès que $y < 0$. Autrement dit, l'inégalité précédente n'est pas valable sur $\mathbb{R}^{-*}$.

3. D'après le théorème fondamental de l'analyse, g est la primitive NULLE EN 0 de $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$, qui est positive et paire sur $\mathbb{R}$: g est donc impaire et strictement croissante. Par minoration, comme $y \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $g(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par imparité, $g(y) \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. D'après le théorème de la bijection dérivable, g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. $y \mapsto \displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = g(y) - g(x)$ est bijective puisque g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $y \mapsto g(x)$ est constante. Donc 1 admet un unique antécédent par cette fonction : notons $f(x)$ cet antécédent. On a alors $\displaystyle\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.
5. Cette dernière égalité se réécrit $g(f(x)) - g(x) = 1$, soit $g(f(x)) = 1 + g(x)$. En composant à gauche par g^{-1}, il vient : $f(x) = g^{-1}(1 + g(x))$. Par composition, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement.

14 - solution

1. $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ seulement, et elle y est alors continue. Ainsi :

$$\begin{aligned} g(x) \text{ est défini} &\iff [x\,,x^2] \subset \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\} \\ &\iff x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Donc g est définie sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. De plus, d'après le TFA, f admet au moins une primitive F sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\},\ g(x) = F(x^2) - F(x).$$

Par opérations algébriques, g dérivable sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $g'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$.
On en conclut que g est strictement croissante sur $]0\,,1[$ et sur $]1\,,+\infty[$.
Il est délicat de se prononcer sur la monotonie de g sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ à ce stade, mais à l'aide du résutat de la question 3, on peut affirmer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$.
2. Soit $x > 1$. Alors $x^2 > 1$ et $\forall t \in [x\,,x^2]$, $t > 1$, donc $\ln(t) > 0$. Or, sur ce même intervalle, par inégalité de convexité classique, on a $\ln(t) \leqslant t$; par stricte positivité des deux membres de l'inégalité, il vient $\frac{1}{\ln(t)} \geqslant \frac{1}{t}$ donc $g(x) \geqslant \ln(x)$. Or, $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par minoration.
3. Le changement de variable proposé est de classe $\mathscr{C}^1$ bijectif, on peut donc écrire : $g(x) = \displaystyle\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$.
$\mathrm{DL}_1(0)$: $\mathrm{e}^u \underset{u\to0}{=} 1 + u + o(u)$, donc $\mathrm{e}^u - 1 \underset{u\to0}{=} u + o(u)$ donc $\frac{\mathrm{e}^u - 1}{u} \underset{u\to0}{=} 1 + o(1)$.
Notons alors H une primitive de $h : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}$: H est bien définie puisque h est continue sur $\mathbb{R}^*$ (opérations algébriques) et admet un $\mathrm{DL}_0(0)$.
Par théorème de primitivation des DL : $H(u) \underset{u\to0}{=} H(0) + u + o(u)$. On peut alors mener les calculs suivants :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} (h(u) + u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} h(u)\,\mathrm{d}u + [\ln(u)]_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \\ &= H(2\ln(x)) - H(\ln(x)) + \ln(2) \\ &\underset{x\to1}{=} H(0) + 2\ln(x) + o(2\ln(x)) - H(0) - \ln(x) + o(\ln(x)) + \ln(2) \quad \text{car } \ln(x), 2\ln(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0, \\ &\underset{x\to1}{=} \ln(2) + \ln(x) + o(\ln(x)). \end{aligned}$$

En conclusion, $g(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} \ln(2)$.
4. Si $u < -1$, $\left|\frac{\mathrm{e}^u}{u}\right| \leqslant \mathrm{e}^u$, intégrable sur $]-\infty\,,-1[$. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge. *A fortiori*, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$, et $g(x) = \displaystyle\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$.
5. g est prolongeable par continuité en 0 et 1, g' admet des limites finies en 0 et 1...

15 - solution PREREQUIS : DL.

1. Comme $f > 0$, F est strictement croissante.
2. Si $x \neq 0$, on pose $u = xt$, changement de variable affine donc de classe $\mathscr{C}^1$, $G(x) = \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{F(x)}{x}$. G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Et $G'(x) = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2}$.
3. $G(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \underset{x\to0}{\longrightarrow} F'(0) = f(0) = 1 = G(0)$, car F est dérivable en 0. Par conséquent, G est continue en 0.

4. $\frac{G(x)-G(0)}{x-0} = \frac{F(x)-x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc G est dérivable en 0 et $G'(0) = 0$.
Autre justification. $G(x) = 1 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$, donc G admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ donc G est dérivable en 0 et $G'(0) = 0$.
Remarque. Justification, à l'aide du théorème de primitivitation des DL, de l'hypothèse faite dans l'énoncé : quand $u \to 0$, $\mathrm{e}^u = 1 + u + o(u)$; en substituant $-t^2$ à u, on a $f(t) = 1 - t^2 + o(t^2)$, et par primitivation, $F(x) = F(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
5. Selon 2, $xG'(x) + G(x) = f(x)$.

16 - solution 1. $I_0 = \frac{\pi}{4}$.
Une primitive de $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{\cos'}{\cos}$ est $-\ln|\cos|$: $I_1 = \frac{1}{2}\ln(2)$.
$I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (1+\tan^2(t))\ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \tan'(t)\ \mathrm{d}t - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)(\tan(t) - 1)\ \mathrm{d}t$. Or, sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan^n(t) \geqslant 0$ et $\tan(t) - 1 \leqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale : $I_{n+1} - In \leqslant 0$. Ainsi, (I_n) est décroissante.
Comme $\tan^n \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $I_n \geqslant 0$. Minorée et décroissante, (I_n) converge.
3. $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\tan^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)(1+\tan^2(t))\ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\ \mathrm{d}t$. D'où $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$.
4. On propose trois méthodes, la dernière étant accessible avec le cours de MP ou PSI.
Première méthode. D'après la question 2, (I_n) converge vers un nombre ℓ, positif ou nul par passage à la limite dans l'inégalité large $I_n \geqslant 0$. On peut donc passer à la limite dans la relation de récurrence : $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$, donc $\ell = -\ell$ ce qui entraîne $\ell = 0$.
Deuxième méthode. Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leqslant \tan(t) \leqslant \frac{4t}{\pi}$, donc $0 \leqslant \tan^n(t) \leqslant \frac{4^n t^n}{\pi^n}$, puis $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{4^n}{\pi^n}\displaystyle\int_0^{\pi/4} t^n\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4(n+1)}$.
Le théorème des gendarmes permet de conclure.
Troisième méthode. [Spé] Théorème de convergence dominée :
- $\tan^n$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,
- $\tan^n \xrightarrow{\text{CVS}} \mathbb{1}_{\{\pi/4\}}$ qui est bien $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,
- *Domination.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $|\tan^n(x)| \leqslant \tan(x)$ qui est intégrable.

Alors $I_n \to \displaystyle\int_0^{\pi/4} \mathbb{1}_{\{\pi/4\}} = 0$.

17 - solution 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0\,,1]$, on a $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, donc $0 \leqslant \ln^n(1+x) \leqslant x^n$.
Par croissance de l'intégrale, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. D'après le théorème des gendarmes, $I_n \to 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. IPP avec $u(x) = \ln^{n+1}(1+x)$, $u'(x) = \frac{n+1}{1+x}\ln^n(1+x)$, $v'(x) = 1$ et $v(x) = 1+x$ (u, v sont $\mathscr{C}^1$) : $I_{n+1} = 2\ln^{n+1}(2) - (n+1)I_n$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln^n(1+x)(\ln(1+x) - 1)\ \mathrm{d}x$. Or, pour tout $x \in [0\,,1]$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$.
Donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et (I_n) est décroissante.
4. Récurrence sur p.
   - *Initialisation.* Découle de la question 1.
   - *Hérédité.* Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $I_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$. Alors on a aussi $I_{n+1} = o\left(\frac{1}{(n+1)^p}\right)$, et donc $I_{n+1} = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.
   De plus, par croissances comparées, $2\ln^{n+1}(2) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$. Donc $nI_n = 2\ln^{n+1}(2) - I_{n+1} = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.
   Autrement dit, $I_n = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$.

18 - solution 1. D'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes. Notons donc m et M les minimum et maximum de f sur $[a\,,b]$ respectivement.
On a donc $\forall x \in [a\,,b]$, $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$. Par positivité de l'intégrale :

$$m\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \neq 0$, $m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x} \leqslant M$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a\,,b]$ tel que $\frac{\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x} = f(c)$, soit $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.

- Sinon, $\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = 0$, donc tout $c \in [a\,,b]$ convient.

2. Convergence dominée.

19 - solution Notons $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\ \mathrm{d}x$.
2 IPP : $I_n = \frac{f(1)}{n+1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} f'(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + J_n$ en notant $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} f''(x)\ \mathrm{d}x$.
Or, f'' est continue sur le segment $[0\,,1]$ donc d'après le théorème des bornes atteintes, il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0\,,1]$, $|f''(x)| \leqslant M$. De fait, $|J_n| \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} M\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.
A fortiori, $n^2 J_n \to 0$ donc $J_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
En injectant dans le calcul de I_n, il vient :

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{f(1)}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{f'(1)}{n^2} \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{f(1)}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{f'(1)}{n^2}(1+o(1)) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat avec $a = f(1)$ et $b = -(f(1)+f'(1))$.

20 - solution

1. Récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$: il existe une unique fonction ρ dérivable sur $[0\,,n]$ comme dans l'énoncé.
   - *Initialisation.* ρ est définie, constante égale à 1, donc dérivable sur $[0\,,1]$ d'après l'énoncé. D'où l'existence et l'unicité sur $[0\,,1]$.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que ρ soit bien définie et ce, de manière unique, sur $[0\,,n]$. Il reste à voir que c'est encore le cas sur $]n\,,n+1]$.
     Notons $\tau :]n\,,n+1] \to \mathbb{R}$ définie par $\tau(x) = \rho(x-1)$. τ désigne une fonction parfaitement définie par hypothèse de récurrence. Or, $\forall x \in]n\,,n+1]$, $x\rho'(x)+\rho(x-1) = 0$ soit $\rho'(x) = -\frac{\tau(x)}{x}$. Ceci est l'expression d'une fonction continue sur $[n\,,n+1]$, on peut donc poser $R(x) = -\int_{n+1}^x \frac{\tau(t)}{t}\ \mathrm{d}t$, définie de manière unique.
     Nécessairement, il existe une constante c telle que $\forall x \in]n\,,n+1]$, $\rho(x) = R(x)+c$ ce qui prouve l'existence de ρ sur $[n\,,n+1]$.
     De plus, on a en particulier $\rho(n) = R(n)+c$, donc c est unique ce qui prouve l'unicité.
2. Posons, pour $x \in [1\,,+\infty[$, $g(x) = x\rho(x) - \int_{x-1}^x \rho(t)\ \mathrm{d}t$.
   Par opérations algébriques et théorème fondamental de l'analyse, g est continue sur $[1\,,+\infty[$ et dérivable sur $]1\,,+\infty[$, et $\forall x > 1$, $g'(x) = 0$. Ainsi, g est constante sur $[1\,,+\infty[$ et $g(1) = 0$.
   D'où $\forall x \in [1\,,+\infty[$, $x\rho(x) = \int_{x-1}^x \rho(t)\ \mathrm{d}t$.
   Récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$: $\rho > 0$ sur $[0\,,n]$.
3. $\forall x > 1$, $x\rho(x) = -\rho(x-1) < 0$ donc $\rho(x) < 0$. Ainsi, ρ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. *A fortiori*, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\rho(x) \leqslant 1$.
   Selon la question 2, $x\rho(x) \leqslant 1$, donc $\rho(x) \leqslant \frac{1}{x}$. Théorème des gendarmes : $\rho(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

21 - solution Sommes de Rieman : $\int_0^1 x^2 \sin(\pi x)\ \mathrm{d}x = \frac{\pi^2-4}{\pi^3}$ via 2 IPP.

22 - solution $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n} \sum\limits_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = n^{3/2} v_n$ où $v_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{3/2}$.

23 - solution $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n \sum\limits_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)} = n^2 v_n$ où $v_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$.
$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{8} n^2$.
Le calcul de l'intégrale se fait en posant $x = u^2$ ou en observant la courbe géométrique décrite...

24 - solution

1. Théorème des sommes de Riemann : $S_n \to \int_0^1 \ln(1+t)\ \mathrm{d}t = 2\ln(2) - 1$.

2. $P_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)\right)^{1/n} = n\,\mathrm{e}^{S_n} \sim \frac{4n}{\mathrm{e}}$.

25 - solution 1. Sommes de Riemann : $u_n \to \int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$.

2. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $y \leqslant x$. Si $y = x$, l'encadrement est évident ; sinon, TAF à $f : t \mapsto \mathrm{e}^t$ sur $[y\,, x]$: il existe $t \in]y\,, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(t) = \mathrm{e}^t$. Or, par croissance de exp, $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^y$, soit $\mathrm{e}^x \leqslant \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x-y} \leqslant \mathrm{e}^y$. Comme $x > y$, on en déduit l'encadrement souhaité.

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0\,, n-1]\!]$. Soit $x \in \left[\frac{k}{n}\,, \frac{k+1}{n}\right]$. On applique la question précédente pour $\left(x, \frac{k}{n}\right)$: $\left(x - \frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{k}{n}} \leqslant \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{k}{n}} \leqslant \left(x - \frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^x \leqslant \left(x - \frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{k+1}{n}}$.

   Intégration terme à terme : en remarquant que $\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{1/n} u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2n^2}$, on obtient l'encadrement souhaité.

   (b) $n(\ell - u_n) = \int_0^1 n\,\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{k/n} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} I_{k,n}$. Sommation membre à membre :

$$\frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}} \leqslant n(\ell - u_n) \leqslant \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{k+1}{n}}.$$

   Somme finie géométrique : $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^k = \frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$. Ainsi $\frac{1}{2n^2} \frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{1-\mathrm{e}} \leqslant n(\ell - u_n) \leqslant \frac{1}{2n^2} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{1-\mathrm{e}}$. Les deux extrémités sont équivalentes à $\frac{1}{2(\mathrm{e}-1)n^3}$, donc d'après le théorème des gendarmes pour les équivalents : $\ell - u_n \sim \frac{1}{2(\mathrm{e}-1)n^2}$.

26 - solution Commençons par prouver que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.

- La deuxième inégalité est la très classique inégalité de convexité du logarithme.
- Pour la première, on peut utiliser une étude de fonction... Ou la FTRI comme suit.
  Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$. $f(t) = 0 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2}{(1+x)^3}(t-x) \, \mathrm{d}x$. Cette intégrale est positive ou nulle, d'où le résultat.

Ensuite, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et $v_n = \ln(u_n)$.

On a $v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

D'après l'encadrement précédent, on a donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^2}{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 \leqslant v_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

- Somme de Riemann, puisque f est continue sur $[0\,, 1]$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = x \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \int_0^1 f$.
- Même argument avec f^2 qui est également continue sur $[0\,, 1]$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f^2$, donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^2}{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème des gendarmes : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \int_0^1 f$.

Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \exp\left(x \int_0^1 f\right)$.

27 - solution Soit $x \in \mathbb{R}$. ITL à l'ordre 2 appliquée à $\exp \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, sur $[0\,, x]$: $|\mathrm{e}^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2} \|\exp\|_{\infty,[0,x]}$. Si $x \geqslant 0$, $\|\exp\|_{\infty,[0,x]} = \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{|x|}$. Sinon, $\|\exp\|_{\infty,[0,x]} = 1 \leqslant \mathrm{e}^{|x|}$. D'où le résultat.

28 - solution Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

- f est $\mathscr{C}^\infty$ et récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$: $\forall x \in]-1\,, +\infty[$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.
  - $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On observe que, sur $[0\,, 1]$: $\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty = n!$.

➢ FTL à f sur $[0\,,1]$: $\left|f(1) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left\|f^{n+1}\right\|_\infty$ *i.e.* $|\ln(2) - u_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Théorème des gendarmes : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

29 - solution Soit $x \in [0\,,\pi]$.

➢ FTRI à l'ordre 3 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \int_0^x \sin^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\ \mathrm{d}t$. Cette dernière intégrale est positive ou nulle, d'où l'inégalité de gauche.

➢ FTRI à l'ordre 5 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + \int_0^x \sin^{(6)}(t)\frac{(x-t)^5}{5!}\ \mathrm{d}t$. Cette dernière intégrale est négative ou nulle, d'où l'inégalité de droite.

On peut aussi prouver ces inégalités à l'aide de l'ITL.

30 - solution 1. (a) f est $\mathscr{C}^2$ sur $[x\,,x+h]$ donc l'ITL s'applique : $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2$.

(b) ITR : $h\,|f'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \leqslant ||f(x+h) - f(x)| - |hf'(x)|| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2$.
Donc $h\,|f'(x)| \leqslant |f(x+h) - f(x)| + \frac{h^2}{2}M_2$.
Or, IT : $|f(x+h) - f(x)| \leqslant |f(x+h)| + |f(x)| \leqslant 2M_0$. Donc $h\,|f'(x)| \leqslant 2M_0 + \frac{h^2}{2}M_2$. D'où le résultat.

2. En choisissant n'importe quelle valeur de h (par exemple $h=1$), on obtient que f' est bornée donc M_1 est finie. Posons ensuite $\varphi : h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2$. Une étude des variations de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$ permet de voir que φ admet un minimum sur $\mathbb{R}^{+*}$ atteint en $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, qui vaut $2\sqrt{M_0M_2}$. En passant à la borne inférieure dans la question 1.b, on a $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.

3. ITL : $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2$.
On a donc $-\frac{h^2}{2}M_2 \leqslant hf'(x) - f(x+h) + f(x) \leqslant \frac{h^2}{2}M_2$ et $-\frac{h^2}{2}M_2 \leqslant hf'(x) + f(x+h) - f(x) \leqslant \frac{h^2}{2}M_2$. Par sommation membre à membre, $-h^2M_2 \leqslant 2hf'(x) + f(x-h) - f(x+h) \leqslant h^2M_2$. Il vient : $|f'(x)| \leqslant \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h}$. Le même procédé qu'à la question 2 permet d'obtenir exactement l'inégalité souhaitée.

31 - solution 1. Comme $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a\,,b]$, le théorème des bornes atteintes permet de justifier l'existence de $m = \min\{f^{(n+1)}(x),\ x \in [a\,,b]\}$ et $M = \max\{f^{(n+1)}(x),\ x \in [a\,,b]\}$.

2. Soit $t \in [a\,,b]$. On a $m \leqslant f^{(n+1)}(t) \leqslant M$. Comme $(b-t)^n \geqslant 0$, on a donc $m(b-t)^n \leqslant (b-t)^n f^{(n+1)}(t) \leqslant M(b-t)^n$. Par croissance de l'intégrale : $\frac{m(b-a)^{n+1}}{n+1} \leqslant \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{M(b-a)^{n+1}}{n+1}$.

3. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, $f(b) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\ \mathrm{d}t$.
Il suffit donc de montrer qu'il existe $c \in [a\,,b]$ tel que $\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\ \mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}f^{(n+1)}(c)$, ou, en d'autres termes : $\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\ \mathrm{d}t = f^{(n+1)}(c)$.
Or, selon la question précédente, $m \leqslant \frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\ \mathrm{d}t \leqslant M$. Comme m et M sont des valeurs prises par $f^{(n+1)}$ (d'après la question 1), le théorème des valeurs intermédiaires s'applique : il existe bien $c \in [a\,,b]$ tel que $\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\ \mathrm{d}t = f^{(n+1)}(c)$, ce qui permet de conclure que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

32 - solution D'après, le TFA, $F : x \mapsto \int_0^x f$ est l'unique primitive de f s'annulant en 0, et elle est donc $\mathscr{C}^3$ sur $[-1\,,1]$. Soit $x \in [-1\,,1]$. On applique la FTRI à l'ordre 2 à F sur $[0\,,x]$:
$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}F'''(t)\ \mathrm{d}t = f(0)x + \frac{f'(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\ \mathrm{d}t$.

➢ En $x=1$: $\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = f(0) + \frac{f'(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}f''(t)\ \mathrm{d}t$.

➢ En $x=-1$: $\int_0^{-1} f(t)\ \mathrm{d}t = -f(0) + \frac{f'(0)}{2} + \int_0^{-1} \frac{(1+t)^2}{2}f''(t)\ \mathrm{d}t$.

Ainsi, $\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t = 2f(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f''(t)\ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^2}{2} f''(t)\ \mathrm{d}t$.
D'où :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t - 2f(0)\right| &\leqslant \left|\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f''(t)\ \mathrm{d}t\right| + \left|\int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^2}{2} f''(t)\ \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \left|f''(t)\right|\ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^2}{2} \left|f''(t)\right|\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant \|f''\|_{\infty,[-1,1]} \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^2}{2}\ \mathrm{d}t\right) \\
&\leqslant \frac{\|f''\|_{\infty,[-1,1]}}{3}.
\end{aligned}$$

33 - solution Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$ et $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M^n n!$. Montrer que f est nulle sur $\left]-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right[$, puis sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \left]-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right[$. ITL à l'ordre n sur $[0, x]$: $|f(x)| \leqslant (|x|\, M)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) = 0$.
2. ➢ Récurrence sur $p \in \mathbb{N}$: la fonction $g_p : x \mapsto f\left(x + \frac{p}{M}\right)$ vérifie les mêmes hypothèses que f.
   D'après la question 1, pour tout $p \in \mathbb{N}$, g_p s'annule sur $\left]-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right[$ donc f s'annule sur $\left]\frac{p-1}{M}, \frac{p+1}{M}\right[$.

   ➢ Récurrence sur $p \in \mathbb{N}$: la fonction $h_p : x \mapsto f\left(x - \frac{p}{M}\right)$ vérifie les mêmes hypothèses que f.
   D'après la question 1, pour tout $p \in \mathbb{N}$, h_p s'annule sur $\left]-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right[$ donc f s'annule sur $\left]-\frac{p-1}{M}, -\frac{p+1}{M}\right[$.

   ➢ Autrement dit, f est nulle sur $\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{p-1}{M}, \frac{p+1}{M}\right[= \mathbb{R}$.