MATH

Groupe symétrique et déterminant

Exercices 24

Groupe symétrique

1 ☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n. Pour toute permutation σ, on note $\langle\sigma\rangle$ le sous-groupe des itérés de σ : $\langle\sigma\rangle = \{\sigma^k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Décrire $\langle\tau\rangle$.
2. Soient $p \in [\![2, n]\!]$ et σ un p-cycle. Décrire $\langle\sigma\rangle$.

2 ☆☆☆ ♥

On observe la permutation de $\mathcal{S}_9$ suivante : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions. Quelle est sa signature ?
3. Trouver l'ordre de σ, c'est-à-dire le plus petit entier naturel non nul p tel que $\sigma^p = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_9}$.
4. Calculer σ^{2025}.

3 ★☆☆ Ⓐ

Soit n un entier naturel impair. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_n}$. Montrer que σ possède au moins un point fixe.

4 ★☆☆ Ⓐ ♥

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(a\ b)$ la transposition de $\mathcal{S}_n$ qui échangent a et b ($a, b \in [\![1, n]\!]$ distincts) et γ le cycle $(1\ 2\ \ldots\ n)$.

1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Montrer que, pour tout $a, b \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(a\ b)\sigma^{-1}$ est une transposition (que l'on explicitera).
2. Montrer que les transpositions de la forme $(1\ a)$, avec $a \in [\![2, n]\!]$, engendrent $\mathcal{S}_n$.
3. Montrer que les transpositions de la forme $(a\ a+1)$, avec $a \in [\![1, n-1]\!]$, engrendrent $\mathcal{S}_n$.
4. Montrer que $(1\ 2)$ et γ engendrent $\mathcal{S}_n$. $(1\ 3)$ et γ engrendrent-ils $\mathcal{S}_4$?
5. ★★★ Soient $a, b \in [\![1, n]\!]$ distincts. Montrer que $(a\ b)$ et γ engendrent $\mathcal{S}_n$ ***ssi*** $(b-a) \wedge n = 1$.

5 ★★☆ ♡ **Le groupe alterné**

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. On définit le *groupe alterné* : $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \varepsilon(\sigma) = 1\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.
2. Identifier $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$.
3. Soit τ une transposition fixée. Montrer que $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est bijective de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n$.
4. Calculer le cardinal des ensembles $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$.

6 ★☆☆ **Le jeu du taquin**

Un jeu de taquin est constitué de neuf cases dont huit sont occupées par un jeton numéroté de 1 à 8, et une est vide. On peut faire glisser un jeton horizontalement ou verticalement dans la case vide. On repère le résultat d'une manipulation par la permutation des numéros qu'elle produit (on lit les numéros dans l'ordre, sans s'occuper de la case vide). Par exemple, la permutation obtenue dans la manipulation suivante :

1	2	3
4	5	6
7	8	

$\Longrightarrow$

4	1	3
2		5
7	8	6

est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer qu'on ne peut obtenir que des permutations de signature 1.

Déterminants de petite taille

7 ☆☆☆ 🚲

Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$.

8 ☆☆☆ 🚲

Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

9 ☆☆☆ ♥

Calculer : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

10 ☆☆☆

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer : $D_{a,b,c,d} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

11 ☆☆☆

Pour $x \in \mathbb{C}$, calculer : $\begin{vmatrix} x-7 & -4 & 0 & 0 \\ 12 & x+7 & 0 & 0 \\ -20 & -11 & x+6 & 12 \\ 12 & 6 & -6 & x-11 \end{vmatrix}$.

12 ☆☆☆

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer : $D_{a,b} = \begin{vmatrix} 2+a & 2 & 1+a \\ 3-a & 3 & 3-a \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

13 ★☆☆ ♥

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer et factoriser le déterminant : $D_{a,b,c} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix}$.

14 ★☆☆ ♥ **(presque VDM) CCinP PC**

Soient a, b, c trois complexes.

1. Calculer le déterminant : $D_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.
2. En déduire le déterminant : $D_2 = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

15 ★★☆ ✍ **CCinP PSI 18**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant suivant et montrer qu'il est toujours positif ou nul :

$$D_{a,b,c} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{vmatrix}.$$

16 ★★☆ ✍ **CCinP PSI**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant $D_{a,b,c}$ suivant et montrer qu'il est indépendant de a et b :

$$D_{a,b,c} = \begin{vmatrix} 1-c & -a & -a & 1 \\ 1-b & a-c & a-1 & -b \\ b & -a & 1-a-c & 1+b \\ 0 & a & a & -c \end{vmatrix}.$$

Déterminants de taille n

17 ☆☆☆ ♥

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}_{[n]}$.

18 ★☆☆ ✍

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer : $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & (0) \\ x & 1+x^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ (0) & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$.

21 ★☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $d_n = \det\left(\binom{i}{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

22 ★★☆ ✍

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficient :

$$a_{i,j} = \begin{cases} a+b & \text{si } i = j \text{ ;} \\ ab & \text{si } i = j+1 \text{ ;} \\ 1 & \text{si } i = j-1 \text{ ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

19 ★☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]}$.

20 ☆☆☆ Ⓐ

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $d_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$.

23 ★☆☆ Ⓐ TPE-EIVP MP 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $d_n = \det((\sin(i+j))_{1\leqslant i,j\leqslant n})$.

24 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficient :

$$a_{i,j} = \begin{cases} a+b & \text{si } i = j \text{ ;} \\ a & \text{si } i > j \text{ ;} \\ b & \text{si } i < j. \end{cases}$$

25 ★☆☆ ♥

Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et a, b deux réels. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $D(x) = \begin{vmatrix} x & & (x-b) \\ & \ddots & \\ (x-a) & & x \end{vmatrix}_{[n]}$.

1. Montrer que $D \in \mathbb{R}_1[X]$.
2. En déduire l'expression de $D(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

26 ★☆☆ ♡ Ⓐ Matrice compagnon CCinP PSI 23

Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $(a_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \in \mathbb{C}^n$ et $x \in \mathbb{C}$. Calculer : $P(x) = \begin{vmatrix} x & & (0) & -a_0 \\ -1 & x & & -a_1 \\ & -1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots \quad x & -a_{n-2} \\ (0) & & -1 & x - a_{n-1} \end{vmatrix}$.

Comatrice

27 ★☆☆

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner une CNS sur α pour que A_n soit inversible.
2. Inverser explicitement A_3 quand c'est possible.

Déterminant d'endomorphismes

28 ★☆☆ ♥

On considère l'application $t : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^\top \end{array} \right.$.

1. Trouver une base de l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver une base de l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Calculer $\det(t)$.

Exercices plus abstraits

29 ★☆☆ ♥

Soient $n \in \mathbb{N}$ et A une matrice réelle antisymétrique de taille $2n+1$. Montrer que $\det(A) = 0$.
Le résultat est-il encore vrai si A est une matrice réelle antisymétrique de taille $2n$?

30 ☆☆☆ Ⓐ

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < n$. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Calculer $\det(AB)$.

31 ★☆☆ Ⓐ ♡ **Navale MP 23**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, e une base de cet espace et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose, pour tout $x = (x_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in E^n$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \det_e(x_1, \ldots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Exprimer φ à l'aide de la trace de u et du déterminant dans e.

Applications du calcul de déterminant

32 ☆☆☆ Ⓐ

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ distincts. En utilisant le déterminant, montrer que $\varphi : P \mapsto (P(x_0), \ldots, P(x_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

33 ★☆☆ ♥ **CCinP PSI 19**

1. Redonner le résultat du déterminant de Vandermonde.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que la famille de polynômes $\big((X+k)^n\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.
   Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^n = 0$.
   (a) Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^p = 0$ et en déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$.
   (b) Conclure.

34 ★☆☆ ♥

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $t \in \mathbb{C}$ pour que les trois vecteurs $(1,1,t)$, $(1,t,1)$ et $(t,1,1)$ soient linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^3$.

35 ★★☆ Ⓐ ♡

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *dérangement* de $\mathcal{S}_n$ toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$ vérifiant $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) \neq i$. Y-a-t'il plus de dérangements pairs (signature 1) ou impairs (signature -1) ?

Indications

3 - indication Observer les classes d'équivalence de la relation d'équivalence sur $[\![1, n]\!]$ que l'on peut définir par : $k \sim k' \iff k' = k$ ou $k' = \sigma(k)$.

4 - indication 4. Observer le sous-groupe $G_d = \{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \sigma(i) - i \equiv \sigma(j) - j\ [d]\}$.

10 - indication Observer les lignes consécutives.

13 - indication La somme des éléments sur chaque colonne est constante.

14 - indication D_1 : opérations sur les lignes ; D_2 : opérations sur les colonnes pour se ramener à D_1.

16 - indication Observer que deux colonnes et deux lignes sont « proches » et utiliser les opérations élémentaires.

17 - indication Opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$.

21 - indication Observer les différences de deux lignes consécutives.

22 - indication Développer par rapport à la 1ère ligne pour faire apparaître une relation de récurrence.

23 - indication Formules trigo : la j-ème colonne est CL de deux colonnes indépendantes de j.

24 - indication Oérations élémentaires pour ramener à un déterminant tridiagonal, puis développer par rapport à la première ligne pour faire apparaître une relation de récurrence.

26 - indication Développer par rapport à la dernière colonne. *Méga-astuce :* $L_1 \leftarrow \sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1} L_k$.

29 - indication Rappeler la définition de matrice antisymétrique et appliquer le déterminant.

30 - indication Majorer $\mathrm{rg}(AB)$.

31 - indication Observer que φ est une forme n-linéaire alternée.

32 - indication Considérer sa matrice dans les bases canoniques...

33 - indication 2.a. Dériver la relation de l'énoncé. 2.b. Observer les $n+1$ relations de 2.a. simultanément.

35 - indication Noter $\mathcal{D}_n^+$ l'ensemble des dérangements pairs et observer que $|\mathcal{D}_n^+| = \sum\limits_{\sigma \in \mathcal{D}_n^+} \varepsilon(\sigma)$, à mettre en parallèle avec la définition du déterminant.

Solutions

1 - solution 1. $\langle\tau\rangle = \{\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}, \tau\}$.

2. $\langle\sigma\rangle = \{\sigma^k,\ k \in [\![0, p-1]\!]\}$.

2 - solution 1. $\sigma = (1\ 4\ 7\ 8)(2\ 6\ 5)(3\ 9)$.

2. $\sigma = (1\ 4)(4\ 7)(7\ 8)(2\ 6)(6\ 5)(3\ 9)$. 6 transpositions : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = 1$.
3. Dans la question 1, la décomposition est formée de permutations qui commutent donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sigma^k = (1\ 4\ 7\ 8)^k(2\ 6\ 5)^k(3\ 9)^k.$$

Or :
   - $(3\ 9)^k = \mathrm{Id}$ si $k \in 2\mathbb{N}$ et $(3\ 9)^k = (3\ 9)$ sinon ;
   - $(2\ 6\ 5)^k = \mathrm{Id}$ si $k \in 3\mathbb{N}$, $(2\ 6\ 5)^k = (2\ 6\ 5)$ si $k \in 3\mathbb{N}+1$ et $(2\ 6\ 5)^k = (2\ 5\ 6)$ sinon.
   - $(1\ 4\ 7\ 8)^k = \mathrm{Id}$ si $k \in 4\mathbb{N}$, $(1\ 4\ 7\ 8)^k = (1\ 4\ 7\ 8)$ si $k \in 4\mathbb{N}+1$, $(1\ 4\ 7\ 8)^k = (1\ 7)(4\ 8)$ si $k \in 4\mathbb{N}+2$ et $(1\ 4\ 7\ 8)^k = (1\ 8\ 7\ 4)$ sinon.

   Ainsi, $p = 12$.
4. $2025 = 168 \times 12 + 7$, donc $\sigma^{2025} = \sigma^7 = (1\ 4\ 7\ 8)^7(2\ 6\ 5)^7(3\ 9)^7 = (1\ 4\ 7\ 8)^3(2\ 6\ 5)(3\ 9) = (1\ 8\ 7\ 4)(2\ 6\ 5)(3\ 9)$.

3 - solution On peut dire que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\{k, \sigma(k)\}$ est de cardinal 1 ou 2. Supposons, par l'absurde, qu'ils soient tous de cardinal 2.

- On définit la relation binaire $\sim$ sur $[\![1,n]\!]$: $k \sim k' \iff k' = k$ ou $k' = \sigma(k)$. C'est une relation d'équivalence :
  - *Réflexivité.* Évidente.
  - *Symétrie. Transitivité.* Évidentes puisque $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ donc $\sigma^{-1} = \sigma$.
- De fait, $\{\{k, \sigma(k)\},\ k \in [\![1,n]\!]\}$ est une partition de $[\![1,n]\!]$, qui est donc de cardinal pair... Absurde, car n est impair.

4 - solution 1. $\forall a, b \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(a\ b)\sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \sigma(b))$.

2. On observe, selon la question 1 : $\forall a, b \in [\![1,n]\!]$, $a \neq b \Longrightarrow (1\ a)(1\ b)(1\ a) = (a\ b)$. Ainsi, les transpositions de la forme $(1\ a)$ engendrent toutes les transpositions qui, elles, engendrent $\mathcal{S}_n$.
3. On observe, selon la question 1 : $(a\ a+1)(1\ a)(a\ a+1) = (1\ a+1)$. Ainsi, par récurrence immédiate, les transpositions de la forme $(a\ a+1)$ engendrent les transpositions de la forme $(1\ a)$ qui, selon la question 2, engendrent $\mathcal{S}_n$.
4. $(1\ 2)$ et γ engendrent toutes les transpositions de deux termes consécutifs : en effet, selon la question 1, $\gamma\tau\gamma^{-1} = (\gamma(1)\ \gamma(2)) = (2\ 3)$ et, par récurrence immédiate, on a $(k\ k+1) = \gamma^{k-1}\tau\gamma^{1-k}$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. On conclut en utilisant la question précédente.
   Par contre, $(1\ 2)$ n'est pas engrendré par $(1\ 3)$ et γ.
5. Notons $d = (b-a) \wedge n$ et $G_d = \{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \forall i, j \in [\![1,n]\!],\ \sigma(i) - i \equiv \sigma(j) - j\ [d]\}$.
   - On montre facilement que G_d est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.
   - On observe que G_d contient $(a\ b)$, puisque $\sigma(i) - i$ vaut soit 0, soit $b - a$ soit $a - b$, et γ, puisque $\gamma(i) - i$ est constant égal à 1.
   - On note par ailleurs que $(1\ 2) \in G_d$ ***ssi*** $d = 1$, puisque pour $\sigma = (1\ 2)$, on a $\sigma(i) - i$ qui vaut 1, -1 ou 0.

   Ainsi : $(a\ b)$ et γ engendrent $\mathcal{S}_n \iff G_d = \mathcal{S}_n \iff (1\ 2) \in \mathcal{S}_n \iff d = 1$.

5 - solution 1. $\mathcal{A}_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ puisque ε est un morphisme de groupes.

2. - $\mathcal{A}_3 = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{S}_3}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.
   - $\mathcal{A}_4 = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{S}_4}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.
3. $\varphi^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_n}$ donc φ est bijective.
4. $\mathcal{S}_n$ est de cardinal $n!$. Et $\varphi(\mathcal{A}_n) = \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ puisque τ est de signature -1. Donc le cardinal de $\mathcal{A}_n$ est la moitié de celui de $\mathcal{S}_n$, soit $\frac{n!}{2}$.

6 - solution Un déplacement horizontal ne change pas l'ordre des numéros donc la permutation associée est Id. Un déplacement horizontal se traduit par un cycle de longueur 3, donc de signature 1. Une composée de tels déplacement se traduit donc par une composée de permutation de signature 1, on obtient donc, après plusieurs déplacements, une permutation de signature 1.

7 - solution $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 19.$

8 - solution Développement par rapport à la deuxième colonne : $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 8.$

9 - solution On fait apparaître trois zéros sur la colonne C_3 assez facilement :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\
&= (-1)^{3+3} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à } C_3, \\
&= -(-1)^{2+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{en redéveloppant par rapport à } C_3, \\
&= -1.
\end{aligned}$$

10 - solution $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$D_{a,b,c,d} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

11 - solution Déterminant diag par blocs : $(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)$.

12 - solution Par opérations élémentaires sur les colonnes et les lignes :

$$\begin{aligned}
D_{a,b} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1+a \\ 0 & 3 & 3-a \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_3, \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1+a \\ 0 & 3 & 3-a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1, \\
&= 3a \quad \text{en tant que déterminant triangulaire.}
\end{aligned}$$

13 - solution $L_1 \leftarrow \sum L_i$:

$$D_{a,b,c} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix}.$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$:

$$D_{a,b,c} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

14 - solution

1. *Idée 1. On reconnaît presque un déterminant de Vandermonde.* $D_1 = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.
D'après le résultat du déterminant de Vandermonde : $D_1 = abc(b-a)(c-a)(c-b)$.
Idée 2. On adapte la démonstration du déterminant de Vandermonde. Si $a = b$ ou $a = 0$ ou $b = 0$, $D_1 = 0$. Supposons $a, b \in \mathbb{C}^*$ tels que $a \neq b$, et notons $D(x)$ le déterminant obtenu en substituant c par x. En développant brutalement $D(x)$ par rapport à la dernière colonne, on observe que D est un polynôme de degré 3 de coefficient dominant $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab(b-a)$. De plus, $D(0) = D(a) = D(b) = 0$, donc 0, a et b sont trois racines distinctes de D, donc $D(x) = ab(b-a)x(x-a)(x-b)$. Ainsi, $D_1 = D(c) = abc(b-a)(c-a)(c-b)$.
Idée 3. Opérations astucieuses sur les lignes. $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - a^2L_1$.

2. *Idée 1.* Linéarité par rapport à la première colonne, puis la deuxième, puis la troisième :

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & a \\ a^2 & b^2 & a^2 \\ a^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & c \\ a^2 & c^2 & c^2 \\ a^3 & c^3 & c^3 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & a \\ a^2 & c^2 & a^2 \\ a^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{\begin{vmatrix} b & b & c \\ b^2 & b^2 & c^2 \\ b^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & b & a \\ b^2 & b^2 & a^2 \\ b^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & c & c \\ b^2 & c^2 & c^2 \\ b^3 & c^3 & c^3 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En permutant les colonnes du dernier déterminant selon le cycle (1 2 3), de signature 1, on obtient D_1. Donc $D_2 = 2D_1$.

Idée 2. Par opérations élémentaires sur les colonnes :

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 2a & b+c & c+a \\ 2a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ 2a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3 \\ &= \begin{vmatrix} 2a & b+c & c \\ 2a^2 & b^2+c^2 & c^2 \\ 2a^3 & b^3+c^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - \frac{1}{2}C_1 \\ &= \begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2a^2 & b^2 & c^2 \\ 2a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{aligned}$$

Par linéarité par rapport à la première colonne : $D_2 = 2D_1$.

Idée 3. Observation : en posant A_1 et A_2 les deux matrices des questions 1 et 2, ainsi que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A_2 = A_1 A$. Donc $D_2 = D_1 \det(A) = 2D_1$.

15 - solution Difficile de trouver des opérations élémentaires faisant apparaître des zéros sur une ligne ou une colonne... On développe soigneusement par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} D_{a,b,c} &= a^2(b^2c^2 - (bc+a)(bc-a)) \\ &\qquad -(ab+c)((ab-c)c^2 - (bc+a)(ac+b)) \\ &\qquad\qquad +(ac-b)((ab-c)(bc-a) - b^2(ac+b)) \\ &= a^2(b^2c^2 - b^2c^2 + a^2) \\ &\qquad -(ab+c)(abc^2 - c^3 - abc^2 - b^2c - a^2c - b) \\ &\qquad\qquad +(ac-b)(ab^2c - bc^2 - a^2b + ac - b^2ac - b^3) \\ &= a^4 \\ &\qquad -(ab+c)(-c^3 - b^2c - a^2c - b) \\ &\qquad\qquad +(ac-b)(-bc^2 - a^2b + ac - b^3) \\ &= a^4 \\ &\qquad +abc^3 + ab^3c + a^3bc + ab^2 + c^4 + b^2c^2 + a^2c^2 + bc \\ &\qquad\qquad -abc^3 - a^3bc + a^2c^2 - ab^3c + b^2c^2 + a^2b^2 - abc + b^4 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $D_{a,b,c} = (a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 0$.

16 - solution $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$:

$$D_{a,b,c} = \begin{vmatrix} 1-c & -a & 0 & 1 \\ 1 & -c & 0 & 1 \\ b & -a & 1-c & 1+b \\ 0 & a & 0 & -c \end{vmatrix} = (1-c) \begin{vmatrix} 1-c & -a & 1 \\ 1 & -c & 1 \\ 0 & a & -c \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$:

$$D_{a,b,c} = (1-c)\begin{vmatrix} 1-c & 0 & 0 \\ 1 & -c & 0 \\ 0 & a & -c \end{vmatrix} = (1-c)^2c^2.$$

17 - solution $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$: $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.
Si $n \geqslant 3$, $L_2 = L_3$ donc $D_n = 0$. Et sinon, on calcule élémentairement : $D_1 = 1$, $D_2 = -1$.

18 - solution $D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$.
(D_n) est donc une SRL2, de polynôme caractéristique $X^2 - (1+x^2)X + x^2 = (X-1)(X-x^2)$.

- Si $x^2 \neq 1$: $D_n = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$.
- Sinon, $D_n = n+1$.

19 - solution Développement par rapport à la dernière colonne : $d_n = 1 + 2d_{n-1}$. Suite arithmético-géométrique : $d_n = 2^n - 1$.

20 - solution $L_1 \leftarrow L_1 - \sum_{k=2}^{n} L_k$: $2-n$.

21 - solution Pour $i = n, n-1, \ldots, 2$, on effectue les opérations successives $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$. On développe alors par rapport à la première colonne, dont seule la première ligne est non nulle, et on a $D_n = D_{n-1}$. Comme $D_1 = 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = 1$.

22 - solution Notons $D_n = \begin{vmatrix} a+b & 1 & & (0) \\ ab & a+b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & ab & a+b \end{vmatrix}$.

Développement par rapport à la 1ère ligne : $D_n = (a+b)D_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 1 & & (0) \\ 0 & a+b & \ddots & \\ & ab & \ddots & 1 \\ (0) & & ab & a+b \end{vmatrix} = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

SRL2. Poly car : $X^2 - (a+b)X + ab = (X-a)(X-b)$.

- Si $a \neq b$: $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$. Or, $D_1 = a+b$, $D_2 = a^2 + b^2 + ab$, donc $\lambda a + \mu b = a+b$ et $\lambda a^2 + \mu b^2 = a^2 + b^2 + ab$. $L_2 - bL_1$: $\lambda a(a-b) = a^2$, $\lambda = \frac{a}{a-b}$ convient et $\mu = -\frac{b}{a-b}$. Finalement : $D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.
- Si $a = b$: $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$. $D_1 = 2a$, $D_2 = 3a^2$, donc $\lambda = \mu = 1$. $D_n = (n+1)a^n$.

23 - solution

- Si $n = 1$, $d_1 = \sin(1)$.
- Si $n = 2$, $d_2 = \sin(2)\sin(4) - \sin(3)^2 = -\sin^2(1)$.
- Si $n \geqslant 3$, en notant C_j la j-ème colonne de la matrice associée, on a :

$$C_j = \cos(j)\begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n+1) \end{pmatrix} + \sin(j)\begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n+1) \end{pmatrix}.$$

  Ainsi, l'image de la matrice est incluse dans le sev engendré par les deux vecteurs colonnes précédents, donc son rang est $\leqslant 2$. Donc la matrice ne peut pas être inversible et $d_n = 0$.

24 - solution $D_n = \begin{vmatrix} a+b & & (b) \\ & \ddots & \\ (a) & & a+b \end{vmatrix}$.

$L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$: $D_n = \begin{vmatrix} a+b & & (b) & & \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & -b & a \end{vmatrix}$.

$C_i \leftarrow C_i - C_{i-1}$: $D_n = \begin{vmatrix} a+b & -a & & & (0) \\ -b & a+b & -a & & \\ & -b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -a \\ (0) & & & -b & a+b \end{vmatrix}$.

Dév 1ere ligne puis 1ère colonne : $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.
SRL2. Poly car : $X^2 - (a+b)X + ab = (X-a)(X-b)$.

- Si $a \neq b$: $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$. Or, $D_1 = a+b$, $D_2 = a^2+b^2+ab$, donc $\lambda a + \mu b = a+b$ et $\lambda a^2 + \mu b^2 = a^2+b^2+ab$. $L_2 - bL_1$: $\lambda a(a-b) = a^2$, $\lambda = \frac{a}{a-b}$ convient et $\mu = -\frac{b}{a-b}$. Finalement : $D_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.
- Si $a = b$: $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$. $D_1 = 2a$, $D_2 = 3a^2$, donc $\lambda = \mu = 1$. $D_n = (n+1)a^n$.

25 - solution

1. $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - L_1$. Le développement par rapport à la première ligne donne alors une somme de polynôme de degré 1, donc $D \in \mathbb{R}_1[X]$.
2. Selon 1, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $D = \alpha X + \beta$.
   - Supposons $a \neq b$. On observe $D(a) = a^n = \alpha a + \beta$ et $D(b) = b^n = \alpha b + \beta$. Ainsi, $\alpha(a-b) = a^n - b^n$, soit $\alpha = \frac{a^n-b^n}{a-b}$. Et $\beta = a^n - a\frac{a^n-b^n}{a-b} = \frac{-a^nb+ab^n}{a-b} = \frac{ab(b^{n-1}-a^{n-1})}{a-b}$. Bref, $D(x) = \frac{a^n-b^n}{a-b}x + \frac{ab(b^{n-1}-a^{n-1})}{a-b}$.
   - Supposons $a = b \neq 0$. On observe $D(a) = a^n = \alpha a + \beta$ et $D(0) = (-a)^n(n-1)$ (calculs)...
     Ainsi, $D(x) = a^{n-1}[1 + (-1)^{n-1}(n-1)]x + (-a)^n(n-1)$.
   - Supposons $a = b = 0$. $D = 0$.

26 - solution

- *Première idée.* On peut développer par rapport à la première colonne et trouver une sorte de relation de récurrence... Très long et fastidieux.
- *Deuxième idée.* Développer par rapport à la dernière colonne.
  Le mineur en facteur du terme en a_k est diagonal par bloc :

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} x & & & & & & & (0) \\ -1 & x & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -1 & x & & & & \\ \hline & & & & -1 & x & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & -1 & x \\ (0) & & & & & & & -1 \end{array}\right| = (-1)^{n-1-k}x^k.$$

D'où $P(x) = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n+k+1}(-a_k)(-1)^{n-1-k}x^k + (-1)^{2n}(x-a_{n-1})x^{n-1} = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

- *Troisième idée.* Astuce : $L_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}L_k$.

  Alors, en notant $Q(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, on a : $P(x) = \begin{vmatrix} 0 & & (0) & Q(x) \\ -1 & x & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & -1 & x - a_{n-1} \end{vmatrix}$.

  En développant par rapport à la première ligne, il vient directement $P(x) = (-1)^{n+1}Q(x)(-1)^{n-1} = Q(x)$.

27 - solution

1. Notons $a_n = \det(A_n)$.

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{vmatrix} \alpha+n-1 & (1) \\ (\alpha+n-1) & A_{n-1} \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow \sum C_i \\ &= (\alpha+n-1)\begin{vmatrix} 1 & (1) \\ (1) & A_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (\alpha+n-1)\begin{vmatrix} 1 & (1) \\ (0) & (\alpha-1)\,\mathrm{I}_{n-1} \end{vmatrix} \quad L_i \leftarrow L_i - L_1,\ i \geqslant 2 \\ &= (\alpha+n-1)(\alpha-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

A_n est inversible ***ssi*** $\alpha \notin \{1-n, 1\}$.

2. Avec la formule de la comatrice par exemple, si $\alpha \notin \{-2, 1\}$, $A_3^{-1} = \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha-1)} \begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha+1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$.

28 - solution

1. $(E_{i,i})_{1 \leqslant i \leqslant n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$.
2. $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$.
3. Dans la base issue de la concaténation des deux précédentes, t a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est : $\det(t) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

29 - solution $A^\top = -A$, donc $\det(A^\top) = (-1)^{2n+1} \det(A) = -\det(A)$. Or, $\det(A^\top) = \det(A)$. Donc $\det(A) = 0$.
Si A est de taille paire, le résultat ne tient plus : $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$.

30 - solution $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A) \leqslant p < n$, donc $\det(AB) = 0$.

31 - solution On observe facilement que φ est une forme n-linéaire alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda \det_e$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on introduit $(\lambda_{k,i})_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tel que $u(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{k,i} e_i$.
On calcule alors :

$$\begin{aligned} \varphi(e) &= \sum_{k=1}^{n} \det_e(e_1, \ldots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \ldots, e_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \det_e(e_1, \ldots, e_{k-1}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_{k,i} e_i, e_{k+1}, \ldots, e_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{k,i} \det_e(e_1, \ldots, e_{k-1}, e_i, e_{k+1}, \ldots, e_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,k} \\ &= \mathrm{Tr}(u). \end{aligned}$$

On en conclut que $\varphi = \mathrm{Tr}(u) \det_e$.

32 - solution C'est une application linéaire. Sa matrice dans les bases canoniques des ev est la matrice de Vandermonde associée à $x_0, \ldots, x_n$. Comme ceux-ci sont distincts, le déterminant est non nul donc la matrice est inversible donc l'application est bijective.

33 - solution

1. -
2. (a) Calculer la dérivée $(n-p)$-ème de la relation de base puis évaluer en 0.
   (b) La matrice de Vandermonde est inversible, et multipliée par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top$ elle est nulle...

34 - solution Les trois vecteurs sont linéairement indépendants ***ssi*** ils forment une base de $\mathbb{C}^3$ (puisqu'il y a trois vecteurs dans $\mathbb{C}^3$ qui est de dimension 3) *i.e.* le déterminant associé est non nul.
Calcul : ce déterminant vaut $-(t+2)(t-1)^2$. Donc la famille est libre ***ssi*** $t \notin \{-2, 1\}$.

35 - solution On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{D}_n^+$ l'ensemble des dérangements pairs et $\mathcal{D}_n^-$ l'ensemble des dérangements impairs. On cherche le signe de $s = |\mathcal{D}_n^+| - |\mathcal{D}_n^-|$.
Or, $|\mathcal{D}_n^+| = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n^+} \varepsilon(\sigma)$ et $|\mathcal{D}_n^-| = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n^-} (-\varepsilon(\sigma))$, de sorte que $s = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n^+} \varepsilon(\sigma) + \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n^-} \varepsilon(\sigma)$.
Comme on a l'union disjointe $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n^+ \cup \mathcal{D}_n^-$, on a donc $s = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \varepsilon(\sigma)$.
On observe, avec la définition du déterminant, que $s = \det(A)$ où $A = J - \mathrm{I}_n$, J désignant la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Et on peut alors montrer que $s = (-1)^{n-1}(n-1)$.
Il y a donc plus de dérangements pairs que de dérangements impairs ***ssi*** n est impair.
Remarque : on peut d'ailleurs trouver explicitement $|\mathcal{D}_n^+|$ et $|\mathcal{D}_n^-|$, puisque $|\mathcal{D}_n^+| + |\mathcal{D}_n^-| = |\mathcal{D}_n| = (n-1)!$.