

Ev ou pas ?

1 ☆☆☆ ♥

L'ensemble $\{(a, a^2, a^4), a \in \mathbb{R}\}$ est-il un ev ?

2 ☆☆☆ ♥ **Disque**

L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 3\}$ est-il un ev ?

3 ☆☆☆

L'ensemble $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \forall t \in [0, 1], at(t+1) = bt^2 + ct + d\}$ est-il un ev ?

4 ☆☆☆

Pour quelle(s) valeur(s) du réel t l'ensemble $F_t = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a + t(b - d + 1) = 0\}$ est-il un sev de $\mathbb{R}^4$?

5 ★☆☆

L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xy + yz + zx = 0\}$ est-il un ev ?

6 ☆☆☆ ♥ **Commutant d'une matrice**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AB = BA\}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

7 ★☆☆ ♥

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

- F , l'ensemble des fonctions croissantes.
- G , l'ensemble des fonctions strictement croissantes.
- H , l'ensemble des fonctions monotones.
- K , l'ensemble des fonctions sommes de deux fonctions monotones.

8 ★☆☆ ♥

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les ensembles suivants sont-ils des sous- $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de l'ensemble des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$?

- F , l'ensemble des suites convergentes.
- G , l'ensemble des suites à valeurs réelles.
- H , l'ensemble des suites négligeables devant la suite u .
- K , l'ensemble des suites équivalentes à la suite u .

Famille de vecteurs

9 ☆☆☆

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ une famille libre d'un ev E . Les familles suivantes sont-elles libres ?

- $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$,
- $(3\vec{x}_1 + \vec{x}_3, 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_3 - \vec{x}_1)$,
- $(\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2, \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3, 4\vec{x}_1 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3)$.

10 ★☆☆ ♥ **Polynômes de Hilbert**

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \frac{1}{n!} X(X-1) \cdots (X-n+1)$. Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base $\mathbb{C}[X]$.

11 ★☆☆ ⊕ ♥ **Polynômes de Bernstein**

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}\right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

12 ★☆☆ ⊕ ♥

Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(x \mapsto \sin(kx))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est-elle libre dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

13 ★☆☆

Montrer que la famille $(x \mapsto \sin^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

14 ★☆☆ ↗

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $f_k(x) = \operatorname{sh}^k(x) \operatorname{ch}^{n-k}(x)$. La famille $(f_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

15 ★☆☆ ⊕ Une famille très infinie

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on pose $f_k : x \mapsto |x - k|$. Montrer que la famille $(f_k)_{k \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

16 ★★☆☆ Une famille très infinie

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\varepsilon_t : x \mapsto e^{tx}$. La famille $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est-elle libre dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

17 ☆☆☆ ⊕ ♥

Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible **ssi** la famille de ses colonnes est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Ev de dimension finie

18 ☆☆☆ ♥

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{K} \right\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et donner sa dimension.

19 ☆☆☆ ♥

Justifier que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un ev et donner sa dimension.

20 ☆☆☆ ♥

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, $E = \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$.

- Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E :
 - $F_a = \{P \in E, P(a) = 0\}$;
 - $F_b = \{P \in E, P(b) = 0\}$;
 - $F = \{P \in E, P(a) = P(b) = 0\}$.
- Déterminer une base et la dimension de F_a .
- Quelle est la dimension de F ?

21 ★☆☆ ♥

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note H l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\int_0^1 P(t) dt = 0$.
Montrer que H est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$; trouver une base et la dimension de H .

22 ★☆☆ ♥

Comparer au sens de l'inclusion :

- $F = \operatorname{Vect}((1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5))$;
- $G = \operatorname{Vect}((-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4))$.

23 ★☆☆ ♥

- Soient $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 3x + 4y - t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - t = 0\}$.
 - Déterminer une base et la dimension de F puis de G .
 - Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.
- Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels distincts de dimension 3 quelconques de $\mathbb{R}^4$, alors $F \cap G$ est toujours de dimension 2.
- Étudier le cas de l'intersection de deux hyperplans distincts d'un ev de dimension finie $n \geq 2$.

24 ★★☆☆

Soit E l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y^{(3)}(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = 0.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. On pose $y_k : x \mapsto e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble K des valeurs de k telles que $y_k \in E$, et montrer que $(y_k)_{k \in K}$ est une famille libre de E .
3. Soit $y \in E$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \varphi(x) &= (-2y(x) + 3y'(x) - y''(x)) e^{-3x} \\ \psi(x) &= (-3y(x) + 4y'(x) - y''(x)) e^{-2x} \\ \xi(x) &= (6y(x) - 5y'(x) + y''(x)) e^{-x} \end{cases}$$

Prouver que les fonctions φ , ψ , ξ sont constantes sur $\mathbb{R}$. En déduire que la famille $(y_k)_{k \in K}$ est une famille génératrice de E .

4. Quelle est la dimension de E ?

Famille de vecteurs d'un ev de dimension finie

25 ☆☆☆

Justifier que la famille $((1, 2, -3, 2), (4, 2, 0, 1))$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

26 ☆☆☆

Extraire une base de $\mathbb{R}^3$ à partir de $((1, -2, 1), (2, 2, -3), (-3, 1, 1), (1, -1, 1))$, si possible.

27 ☆☆☆ ⊕ ♥

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}_n = ((X - a)^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et exprimer, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, la matrice-coordonnées de P dans $\mathcal{B}_n$.
2. La famille $\mathcal{B} = ((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle une base de $\mathbb{K}[X]$?

28 ☆☆☆ ♥

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(P_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, où $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_i = (X + 1)^{i+1} - X^{i+1}$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

29 ☆☆☆ ♥

Soit $\mathcal{F} = (X^3, (X - 1)^3, (X - 2)^3, (X - 3)^3, (X - 4)^3)$.

$\mathcal{F}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Si non, peut-on en extraire une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

30 ☆☆☆

Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $f_1 : t \mapsto 1$, $f_2 : t \mapsto \exp(t)$, $f_3 : t \mapsto \exp(-t)$ et $f_4 : t \mapsto \operatorname{ch}(t)$.

1. Calculer le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) .
2. Cette famille est-elle libre ? génératrice de E ?

31 ★★☆☆ ⊕ ♥ Polynôme annulateur

Soient $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A \in E$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_4[X]$ non nul tel que $P(A) = 0$.
2. Montrer que s'il existe $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $P(A) = 0$ et $P(0) \neq 0$, alors A est inversible.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Somme, somme directe, supplémentaire

32 ★☆☆ ♡

Montrer que les ensembles P et I des fonctions respectivement paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

33 ★★☆☆ ♡

Soient $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$, $F = \left\{ f \in E, f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) \right\}$ et $G = \{ f \in \mathcal{C}^2([0, \pi], \mathbb{R}), f'' + f = 0 \}$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

34 ★★☆☆

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$, affines sur $] -1, 0[$ et sur $] 0, 1[$. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie et trouver sa dimension.

35 ★☆☆ ♡

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver un supplémentaire de $\{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercices plus théoriques

36 ☆☆☆ ⊕ ♡

Soient F, G deux sev d'un ev E . Montrer que $F \cap G = F + G \iff F = G$.

37 ★★☆☆

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E tel que $\{0_E\} \neq F \neq E$. Notons G son complémentaire dans E . L'ensemble $H = G \cup \{0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

38 ★☆☆

Soient E un espace vectoriel, F, G , et H trois sous-espaces vectoriels de E tels que :

- $G \subset H$;
- $F \cap H \subset F \cap G$;
- $F + H \subset F + G$.

Montrer que $G = H$.

Sea

39 ☆☆☆ ♡

Montrer que $\{(x + y, x - 2, x - y), x, y \in \mathbb{C}\}$ est un sea de $\mathbb{C}^3$. Identifier un point, sa direction et sa dimension.

40 ★☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{P \in \mathbb{K}_n[X], P(1) = 1\}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{K}_n[X]$.

41 ★☆☆ ↗

Pour quelle(s) valeur(s) des couples $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ l'ensemble $F_{s,t} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a + t(b - d + 1) + (sc)^2 = 2\}$ est-il un sev de $\mathbb{R}^4$? un sea de $\mathbb{R}^4$? Identifier la direction dans ce cas.

42 ★★☆☆ ♡

Soient E un ev, $a, b \in E$ et F, G deux sev supplémentaires dans E . Identifier $(a + F) \cap (b + G)$.

Indications

7 - indication K : « trier » les quatre fonctions selon leur monotonie.

8 - indication K : a-t-on $2u \not\sim u$?

11 - indication Raisonner par l'absurde.

12 - indication Récurrence sur n . Dériver la relation.

14 - indication Évaluer en 0 puis factoriser.

15 - indication Observer la dérivabilité d'une CL des f_k .

16 - indication Montrer que toute sous-famille finie est libre. Utiliser ensuite la dérivation.

17 - indication Utiliser la caractérisation de l'inversibilité par le système associé.

24 - indication 3. Calculer φ' . Ensuite, résoudre le système linéaire d'inconnue (y, y', y'') ...

27 - indication Formule de Taylor.

31 - indication 1. Que dire de la famille (I_2, A, A^2, A^3, A^4) ? 3. Multiplier chaque membre de $P(A) = 0$ par A^{-1} .

32 - indication Supplémentaires : analyse-synthèse.

33 - indication Identifier G (résolution de l'équation différentielle). Puis analyse-synthèse.

36 - indication Observer la décomposition $x = x + 0_E$.

37 - indication Observer la somme d'un élément non nul de F et d'un élément non nul de $G \setminus F$.

38 - indication Il reste à montrer que $H \subset G$. Pour $x \in H$, justifier que $x \in F + H$.

42 - indication Commencer par montrer que $(a + F) \cap (b + G) \neq \emptyset$.

Solutions

1 - solution Non : $(1, 1, 1) \in F$ mais $2(1, 1, 1) \notin F$.

2 - solution Non : $(1, 1) \in F$ mais $2(1, 1) \notin F$.

3 - solution Notons E l'ensemble considéré.

- $E = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a = b, a = c \text{ et } d = 0\}$, car si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vérifient $\forall t \in [0, 1], at(t+1) = bt^2 + ct + d$, alors les polynômes $aX(X+1)$ et $bX^2 + cX + d$ coïncident en une infinité de valeurs, donc sont égaux, donc leurs coefficients sont égaux.
- On en déduit $E = \text{Vect}((1, 1, 1, 0))$: *a fortiori*, E est un ev.

4 - solution Si $t \neq 0$, $0_{\mathbb{R}^4} \notin F_t$ donc F_t n'est pas un sev de $\mathbb{R}^4$.
Si $t = 0$, $F_t = \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.

5 - solution Non : $(2, 2, -1), (2, -1, 2) \in F$ mais $(2, 2, -1) + (2, -1, 2) \notin F$.

6 - solution Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On vérifie que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- $0 \in \mathcal{C}(A)$.
- Si $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ et si $B_1, B_2 \in \mathcal{C}(A)$, alors :
 $A(b_1B_1 + b_2B_2) = b_1(AB_1) + b_2(AB_2) = b_1(B_1A) + b_2(B_2A) = (b_1B_1 + b_2B_2)A$, donc $b_1B_1 + b_2B_2 \in \mathcal{C}(A)$.

Donc $\mathcal{C}(A)$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

7 - solution ➤ F : non. En effet, $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est croissante, mais pas $-\text{Id}_{\mathbb{R}}$.

- G : idem.
- H : non. En effet, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ sont croissantes, mais $x \mapsto x - x^3$ n'est pas monotone.
- K : oui, on le vérifie grâce à la caractérisation de sous-espace vectoriel :
 - ✧ $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})} + 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$ donc $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})} \in K$.
 - ✧ Soient $f, g \in K$, on écrit : $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$ avec f_1, f_2, g_1, g_2 monotones. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que $af + bg \in K$.
On a $af + bg = af_1 + af_2 + bg_1 + bg_2$. Chacune de ces quatre fonctions est croissante ou décroissante.
 - ◆ Si les quatre fonctions ont même monotonie, alors l'écriture $af + bg = (af_1 + af_2) + (bg_1 + bg_2)$ permet de voir que $af + bg \in K$.
 - ◆ Sinon, on note h_1 la somme des fonctions croissantes et h_2 la somme des fonctions décroissantes. On a donc $af + bg = h_1 + h_2 \in K$.

Dans tous les cas, on a montré que $af + bg \in K$, donc K est stable par CL.

8 - solution ➤ F : oui, stabilité par CL grâce aux opérations algébriques.

- G : non, puisque la suite v constante égale à 1 est à valeurs réelles, mais ce n'est pas le cas de iv .
- H : oui, encore grâce aux opérations algébriques.
- K :
 - ✧ oui si u est stationnaire nulle puisque K est dans ce cas l'ensemble des suites stationnaires nulles, qui est bien un ev (puisque c'est $\mathbb{C}[X]!$);
 - ✧ sinon, non, parce que $u \in K$ mais $2u \not\sim u$ donc $2u \notin K$.

9 - solution Oui : sous-famille d'une famille libre.

Oui : revenir à la définition.

Non : les quatre vecteurs sont dans $\text{Vect}(\vec{x}_1; \vec{x}_2; \vec{x}_3)$ qui est de dimension 3.

10 - solution $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$, échelonnée donc libre.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Si $P = 0$, il se décompose clairement comme la CL nulle des H_n . Supposons donc $P \neq 0$ et notons $p = \deg(P) \in \mathbb{N}$.

$(H_n)_{n \in [0, p]}$ est une famille libre de $p+1$ polynômes de $\mathbb{C}_p[X]$, donc c'est une base de $\mathbb{C}_p[X]$. De fait, P est CL de $(H_n)_{n \in [0, p]}$ donc de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi, $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base $\mathbb{C}[X]$.

Cette base permet entre autre de montrer que les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ sont exactement ceux qui s'écrivent comme combinaisons linéaires entières des vecteurs de la base $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

11 - solution Soit $n \in \mathbb{N}$. Les scalaires $\binom{n}{k}$ n'ont pas d'impact sur la liberté; on peut se contenter de montrer que la famille $(X^k(1-X)^{n-k})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{K}^{n+1}$. Supposons $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X^k(1-X)^{n-k}) = 0$.

Supposons par l'absurde que $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \neq 0_{\mathbb{K}^{n+1}}$ et notons alors $p = \min\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k \neq 0\}$. L'égalité précédente devient $\sum_{k=p}^n \lambda_k (X^k(1-X)^{n-k}) = 0$.

Or, le terme de plus bas degré de $X^k(1-X)^{n-k}$ est X^k de sorte que seul le polynôme $X^p(1-X)^{n-p}$ possède un terme de degré p dans cette somme; ce terme a pour coefficient λ_p , qui est donc nul. Absurde.

En conséquence, la famille est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$. Étant formée de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, on peut affirmer que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

12 - solution Récurrence sur n . Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s_k : t \mapsto \sin(kt)$.

➤ *Initialisation.* La famille vide est libre...

➤ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $(s_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ libre.

Soit $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supposons $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k s_k = 0$ (L_1).

En dérivant deux fois, il vient $-\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \lambda_k s_k = 0$ (L_2).

$L_2 + (n+1)^2 L_1 : \sum_{k=1}^n ((n+1)^2 - k^2) \lambda_k s_k = 0$. Par hypothèse de récurrence, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, ((n+1)^2 - k^2) \lambda_k = 0$ puis $\lambda_k = 0$. On réinjecte dans L_1 et il vient $\lambda_{n+1} = 0$. Ainsi, $(s_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ libre.

La propriété est établie par récurrence.

13 - solution Oui, poser $X = \sin(x)$.

14 - solution Soient $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$. Montrons que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0$.

➤ *Première idée : par récurrence forte (finie).*

✧ *Initialisation.* En évaluant en 0 : $\lambda_0 = 0$.

✧ *Hérédité.* Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0$. Montrons $\lambda_{k+1} = 0$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=k+1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$, i.e. $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \operatorname{sh}^i(x) \operatorname{ch}^{n-i}(x) = 0$.

Or, sh^{k+1} ne s'annule qu'en 0, donc on peut affirmer : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \operatorname{sh}^{i-k-1}(x) \operatorname{ch}^{n-i}(x) = 0$.

Les deux expressions de part et d'autre de l'égalité sont des expressions de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc la relation s'étend en 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \operatorname{sh}^{i-k-1}(x) \operatorname{ch}^{n-i}(x) = 0$.

Et justement, pour $x = 0$, il vient $\lambda_{k+1} = 0$. D'où l'hérédité.

Et la récurrence est validée.

➤ *Deuxième idée : par l'absurde.* Supposons qu'il existe $k_0 \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\lambda_{k_0} \neq 0$. Alors $K = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k \neq 0\}$ est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un minimum m .

On a donc $\sum_{k=m}^n \lambda_k f_k = 0$, soit $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}^m(x)g(x) = 0$ en posant $g(x) = \sum_{k=m}^n \lambda_k \operatorname{sh}^{k-m}(x) \operatorname{ch}^{n-k}(x)$.

sh^m s'annulant uniquement en 0, on peut affirmer, par intégrité dans $\mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = 0$.

Par ailleurs, g est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations algébriques sur la continuité, donc $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Donc $\lambda_m = 0$, ce qui est absurde et la famille est libre.

➤ *Troisième idée : en plongeant dans $\mathbb{R}[X]$.* On a $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^n(x) \sum_{k=0}^n \lambda_k \operatorname{th}^k(x) = 0$.

Comme ch^n ne s'annule jamais, on peut dire que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k \operatorname{th}^k(x) = 0$.

Comme $\operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est bijective, on peut réécrire cette égalité ainsi : $\forall t \in]-1, 1[, \sum_{k=0}^n \lambda_k t^k = 0$.

Cela signifie que le polynôme $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ admet tous les éléments de $] -1, 1[$ comme racines. *A fortiori*, P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Cela entraîne que ses coefficients sont tous nuls, c'est-à-dire que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0$.

Avec n'importe laquelle de ses trois méthodes, on a bien montré que la famille est libre.

15 - solution Soit F une partie finie non vide de $\mathbb{R}$. Montrons que $(f_k)_{k \in F}$ est libre.

Introduisons $(\lambda_k)_{k \in F} \in \mathbb{R}^F$ telle que $\sum_{k \in F} \lambda_k f_k = 0$. Fixons $h \in K$ et notons $H = F \setminus \{h\}$. On écrit alors :

$$\lambda_h f_h = - \sum_{k \in H} \lambda_k f_k.$$

Le membre de droite est dérivable en h , puisqu'aucun des $k \in H$ n'est égal à h ; mais f_h ne l'est pas, donc ce n'est possible que si $\lambda_h = 0$. Ceci étant vrai pour tout $h \in K$, on a bien montré que $(f_k)_{k \in K}$ est libre.

16 - solution Soit I une partie finie de $\mathbb{R}$. Montrons que $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ est libre.

Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$. Supposons que $\sum_{i \in I} \lambda_i \varepsilon_i = 0$ et montrons que $\forall i \in I, \lambda_i = 0$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$.

Notons $J = \{j \in I, \lambda_j \neq 0\}$ et observons $C = \text{Card}\{K \subset J, K \neq \emptyset \text{ et } \exists (\mu_k)_{k \in K} \text{ non tous nuls, } \sum_{k \in K} \mu_k \varepsilon_k = 0\}$.

C est une partie de $\mathbb{N}^*$, donc elle est minorée, donc il existe K , partie non vide de I de cardinal le plus petit possible, telle que $\sum_{k \in K} \mu_k \varepsilon_k = 0$. Notons m le plus élément de K .

On a alors $\sum_{k \in K} \mu_k \varepsilon_k = 0$ (L_1). En dérivant, on a aussi $\sum_{k \in K} k \mu_k \varepsilon_k = 0$ (L_2). $L_2 - mL_1$ amène : $\sum_{k \in K \setminus \{m\}} (k-m) \mu_k \varepsilon_k = 0$.

Les $(k-m)\mu_k$ étant tous non nuls, cette relation contredit le caractère minimal de K . C'est donc absurde, ce qui permet d'affirmer que $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ est libre.

Toute sous-famille finie de $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est donc libre, donc $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est libre.

17 - solution Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: on écrit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $M = (C_1 | \dots | C_n)$.

Rappel sur le calcul matriciel : $MX = \sum_{k=1}^n x_k C_k$. On peut alors raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned} M \text{ est inversible} &\iff \text{il existe au moins un système associé de Cramer} \\ &\iff \text{son système associé } MX = 0_{n,1} \text{ admet pour unique solution } X = 0_{n,1} \\ &\iff \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}, \left(\sum_{k=1}^n x_k C_k = 0_{n,1} \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \right) \\ &\iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est libre.} \end{aligned}$$

18 - solution On écrit $F = \text{Vect}(I_2, M)$, où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La famille (I_2, M) est donc une base de F , puisque c'est une famille génératrice formée de deux vecteurs non colinéaires. Ainsi, $\dim(F) = |(I_2, M)| = 2$.

19 - solution On écrit $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}((E_{i,i})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket})$. La famille $(E_{i,i})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est donc une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, puisque c'est une famille génératrice de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, et libre puisque c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi, $\dim(F) = |(E_{i,i})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}| = n$.

20 - solution 1. (a) $\triangleright$ *Premier argument.* On prouve que F_a contient $0_{\mathbb{R}[X]}$ et qu'il est stable par combinaisons linéaires...

$\triangleright$ *Deuxième argument.* On trouve une famille génératrice en utilisant la caractérisation de racine :

$$F_a = \{(X-a)Q, Q \in \mathbb{R}_n[X]\} = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k (X-a)X^k, (a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^{n+1} \right\} = \text{Vect}(((X-a)X^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}).$$

F_a est un sev de E puisque c'est le sev engendré par une certaine famille de vecteurs de E .

$\triangleright$ *Argument utilisant les formes linéaires.* $F_a = \text{Ker}(\Phi_a)$ où $\Phi_a : P \mapsto P(a)$. F_a est le noyau d'une forme linéaire non nulle, c'est donc un hyperplan, et en particulier c'est un sev de E .

(b) Idem pour F_b .

(c) $F = F_a \cap F_b$ est l'intersection de deux sev, c'est un sev.

2. Le deuxième argument précédent permet de dire que $((X - a)X^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une famille génératrice de F_a . En tant que famille de polynômes non nuls étagée en degré, c'est également une famille libre de E . Bref, c'est donc une base de F_a et $\dim(F_a) = n + 1$.
3. ➤ Base : $((X - a)(X - b)X^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$. Donc $\dim(F) = n$.
 ➤ Formule de Grassmann : $\dim(F) = \dim(F_a) + \dim(F_b) - \dim(F_a + F_b) = n$ car $F_a + F_b = E$; en effet, $F_a \subsetneq F_a + F_b \subset E$, donc $\dim(F_a + F_b)$ est $n + 2$...

21 - solution Montrons déjà que c'est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Avec les applications linéaires. Soit $\Phi : P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$. Φ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc $H = \text{Ker}(\Phi)$ est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$ et c'est même un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, donc de dimension n .
- Sans. On vérifie que H contient le polynôme nul et est stable par CL.

Trouvons une base de H . Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, que l'on écrit : $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors $\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P \in H &\iff -a_0 = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} \\ &\iff P = \sum_{k=1}^n a_k X^k - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} = \sum_{k=1}^n a_k \left(X^k - \frac{1}{k+1} \right) \\ &\iff P \in \text{Vect} \left(\left(X^k - \frac{1}{k+1} \right)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \right). \end{aligned}$$

De fait, $\left(X^k - \frac{1}{k+1} \right)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille génératrice de H . En tant que famille de polynômes non nuls étagée en degré, elle est également libre, donc c'est une base de H et $\dim(H) = n$.

22 - solution $-7(1, 0, 1, 1) + 3(-1, -2, 3, -1) = 2(-5, -3, 1, -5)$, donc $F = \text{Vect}((1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1))$. F et G sont de dimension 2, car engendrés par deux vecteurs non colinéaires.
 $(-1, -1, 1, -1) + (4, 1, 2, 4) = 3(1, 0, 1, 1)$ et $7(-1, -1, 1, -1) + (4, 1, 2, 4) = 3(-1, -2, 3, -1)$, donc $F \subset G$.
 Ainsi, $F = G$.

23 - solution 1. (a) Une base de F est $((1, 0, 0, 3), (0, 1, 0, 4), (0, 0, 1, 0))$. $\dim(F) = 3$.

Une base de G est $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$. $\dim(G) = 3$.

(b) Une base de $F \cap G$ est $((2, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0))$. $\dim(F \cap G) = 2$.

2. Observons F et trouvons sa dimension.

- $F + G$ est un sev de $\mathbb{R}^4$, donc $\dim(F + G) \leq 4$.
- Il contient F et G , donc $\dim(F + G) \geq 3$.
- De plus, par l'absurde, si l'on suppose $\dim(F + G) = 3$, comme on a $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, on a forcément $F = F + G = G$, absurde. Donc $\dim(F + G) = 3$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. Donc $\dim(F \cap G) = 2$.

3. Avec le même raisonnement, l'intersection de deux hyperplans distincts d'un ev de dimension finie n est de dimension :

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2.$$

24 - solution 1. Sev de $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. $K = \{1, 2, 3\}$. Deuxième partie classique...

3. $\varphi' = \psi' = \xi' = 0$. Donc :

- $-2y(x) + 3y'(x) - y''(x) = k_3 e^{3x}$;
- $-3y(x) + 4y'(x) - y''(x) = k_2 e^{2x}$;
- $6y(x) - 5y'(x) + y''(x) = k_1 e^x$.

$$L_1 - 2L_2 - L_3 : -2y = k_3 y_3 - 2k_2 y_2 - k_1 y_1.$$

4. (y_k) est une famille libre et génératrice de E , donc E est de dimension 3.

25 - solution $((1, 2, -3, 2), (4, 2, 0, 1))$ est libre car elle est formée de deux vecteurs non colinéaires.

D'après le théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ en choisissant des vecteurs de la base canonique. Comme $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, il suffit d'en trouver deux. On vérifie que $((1, 2, -3, 2), (4, 2, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$ est libre (avec la définition...). C'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

26 - solution $((1, -2, 1), (2, 2, -3), (-3, 1, 1))$ par exemple, en appliquant l'algorithme de la base incomplète.

27 - solution 1. $\triangleright$ *Argument (dimensionnel) simple.* $\mathcal{B}_n$ est une famille de $n+1$ polynômes étagée en degré de $\mathbb{K}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

$\triangleright$ *Argument non dimensionnel.*

$\diamond$ $\mathcal{B}_n$ est une famille de $n+1$ polynômes étagée en degré de $\mathbb{K}_n[X]$ donc $\mathcal{B}_n$ est libre.

$\diamond$ Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. D'après la formule de Taylor, on a $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \in \text{Vect}(\mathcal{B}_n)$. Donc $\mathcal{B}_n$ est génératrice.

Cette dernière écriture permet de donner instantanément la matrice-coordonnées de P dans $\mathcal{B}_n$: $\begin{pmatrix} P(a) \\ P'(a) \\ \vdots \\ P^{(n)}(a)/n! \end{pmatrix}$.

2. Oui : toute sous-famille finie de $\mathcal{B}$ est contenue dans l'une des familles $\mathcal{B}_n$, et est donc libre. Et la formule de Taylor permet encore de voir le caractère générateur.

28 - solution Famille de $n+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{K}_n[X]$, échelonnée en degré : c'est bien une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

29 - solution $\triangleright$ $\mathcal{F}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}_3[X]$ puisque $\text{Card}(\mathcal{F}) = 5 > 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.

$\triangleright$ On peut extraire de $\mathcal{F}$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$ **ssi** $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\diamond$ *Méthode classique.* On montre que $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On cherche à savoir si l'on peut trouver $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P = \alpha X^3 + \beta(X-1)^3 + \gamma(X-2)^3 + \delta(X-3)^3 + \varepsilon(X-4)^3 \quad (E).$$

On résout cette équation (E) :

$$\begin{aligned} (E) &\iff aX^3 + bX^2 + cX + d = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)X^3 + (-3\beta - 6\gamma - 9\delta - 12\varepsilon)X^2 \\ &\quad + (3\beta + 12\gamma + 27\delta + 48\varepsilon)X + (-\beta - 8\gamma - 27\delta - 64\varepsilon) \\ &\iff \begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon \\ b = -3\beta - 6\gamma - 9\delta - 12\varepsilon \\ c = 3\beta + 12\gamma + 27\delta + 48\varepsilon \\ d = -\beta - 8\gamma - 27\delta - 64\varepsilon \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon \\ b = -3\beta - 6\gamma - 9\delta - 12\varepsilon \\ \frac{1}{6}(b+c) = \gamma + 3\delta + 6\varepsilon & L_3 \leftarrow \frac{1}{6}(L_3 + L_2) \\ \frac{1}{18}(b-3d) = \gamma + 4\delta + 10\varepsilon & L_4 \leftarrow \frac{1}{18}(-3L_4 + L_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon \\ b = -3\beta - 6\gamma - 9\delta - 12\varepsilon \\ \frac{1}{6}(b+c) = \gamma + 3\delta + 6\varepsilon \\ -\frac{1}{18}(b+3c+6d) = \delta + 4\varepsilon & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système est échelonné, il possède 4 équations pour 5 inconnues, donc il admet une infinité de solutions. Ainsi, le caractère générateur de $\mathcal{F}$ est prouvé.

D'après le théorème de la base extraire, on peut effectivement extraire une base de $\mathcal{F}$.

On ne demande pas d'explicitier une base de $\mathbb{R}_3[X]$ extraite de $\mathcal{F}$, ce qui permet de s'arrêter là dans l'exercice. Ceci dit, toute solution du système précédent pour $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ permet d'obtenir un lien entre les vecteurs ; ainsi, en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{4}$, on observe que le dernier vecteur de $\mathcal{F}$ est CL des autres vecteurs de $\mathcal{F}$. En l'enlevant de $\mathcal{F}$, on obtient une famille encore génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$, formée de $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$ vecteurs, c'est donc une base...

- ✧ *Méthode liée à l'intuition.* Comme cette famille est liée, on peut tenter d'enlever un vecteur et de montrer que la nouvelle famille est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, par exemple $(X^3, (X-1)^3, (X-2)^3, (X-3)^3)$. Comme son cardinal est $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, supposons $\alpha X^3 + \beta(X-1)^3 + \gamma(X-2)^3 + \delta(X-3)^3 = (H)$.

$$\begin{aligned}
 (H) &\iff 0 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)X^3 + (-3\beta - 6\gamma - 9\delta)X^2 + (3\beta + 12\gamma + 27\delta)X + (-\beta - 8\gamma - 27\delta) \\
 &\iff \begin{cases} 0 = \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ 0 = -3\beta - 6\gamma - 9\delta \\ 0 = 3\beta + 12\gamma + 27\delta \\ 0 = -\beta - 8\gamma - 27\delta \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 0 = \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ 0 = -3\beta - 6\gamma - 9\delta \\ 0 = \gamma + 3\delta \\ 0 = \gamma + 4\delta \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{1}{6}(L_3 + L_2) \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{18}(-3L_4 + L_2) \end{array} \\
 &\iff \begin{cases} 0 = \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ 0 = -3\beta - 6\gamma - 9\delta \\ 0 = \gamma + 3\delta \\ 0 = \delta \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3
 \end{aligned}$$

Ce système est donc de Cramer, donc il admet une (unique) solution, donc le caractère libre est prouvé et on a directement extrait une base!...

- ✧ *On peut également observer une base « connue ».* En effet, $(X^3, (X-1)^3, (X-2)^3, (X-3)^3)$ est la famille des polynômes de Lagrange associée aux réels 0, 1, 2, 3; ce sont quatre nombres distincts, donc cette famille est une base de $\mathbb{R}_3[X]$!
D'ailleurs, cet argument permet de constater qu'ici, n'importe laquelle des sous-familles de $\mathcal{F}$ formées de 4 vecteurs est une base de $\mathbb{R}_3[X]$!

30 - solution

1. $f_4 = \frac{1}{2}(f_2 + f_3)$ donc $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \text{rg}(f_1, f_2, f_3)$.

Or, (f_1, f_2, f_3) est libre : en effet, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ vérifient $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, on peut dériver deux fois : $\lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3 = 0$ et $\lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. En injectant dans la première relation, il vient $\lambda_1 f_1 = 0$ i.e. $\lambda_1 = 0$. Puis, par demi-somme et demi-différence, $\lambda_2 f_2 = 0$ et $\lambda_3 f_3 = 0$, i.e. $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ainsi, (f_1, f_2, f_3) est bien libre et $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 3$.

2. On a déjà observé que (f_1, f_2, f_3, f_4) est liée, donc pas libre. De plus, E est de dimension infinie donc (f_1, f_2, f_3, f_4) ne peut pas être génératrice.

31 - solution

1. (I_2, A, A^2, A^3, A^4) est une famille liée, puisqu'elle est formée de cinq vecteurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

qui est de dimension 4. Donc il existe $(a_i)_{i \in [0,4]}$ formée de scalaires non tous nuls, telle que $\sum_{i=0}^4 a_i A^i = 0$.

En posant $P = \sum_{i=0}^4 a_i X^i$, on a bien trouvé un polynôme annulateur de A dans $\mathbb{R}_4[X]$.

2. Avec les mêmes notations, on suppose donc que $a_0 \neq 0$. Dès lors, $a_4 A^4 + a_3 A^3 + a_2 A^2 + a_1 A = -a_0 I_2$, donc $A \left(-\frac{a_4}{a_0} A^3 - \frac{a_3}{a_0} A^2 - \frac{a_2}{a_0} A - \frac{a_1}{a_0} I_2 \right) = I_2$, ce qui entraîne que A est inversible.
 3. Supposons A inversible. On veut savoir si l'affirmation suivante est vraie : $\exists P \in \mathbb{R}_4[X], (P(A) = 0 \text{ et } P(0) \neq 0)$.

➤ *Première remarque.* Si on considère par exemple $A = I_2$, on sait qu'elle est annulée par $P = X(X-1)$, qui vérifie $P(0) = 0$. Mais cela ne veut pas dire qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de I_2 tel que $P(0) \neq 0$, puisque $X-1$ convient évidemment...

➤ *Montrons que la réciproque est vraie.*

Notons $D = \{\deg(P), P \neq 0 \text{ et } P(A) = 0\}$. C'est un ensemble non vide de $\mathbb{N}$ (selon la question 1) donc il admet un plus petit élément d . Ainsi, il existe $P \in \mathbb{R}_d[X]$ non nul et de degré minimal d tel que $P(A) = 0$.

Écrivons-le $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ avec $a_d \neq 0$. Montrons que a_0 est nécessairement non nul. Supposons par l'absurde

$a_0 = 0$ et multiplions à gauche par A^{-1} dans $P(A) = 0$: on a $\sum_{i=1}^d a_i A^{i-1} = 0$, soit $\sum_{i=0}^{d-1} a_{i+1} A^i = 0$, ce qui contredit la minimalité de d . D'où le résultat.

32 - solution

- Commençons par montrer que P est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

On a $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; $0 \in P$ (fonction nulle); de plus, si f, g sont paires et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$

donc $\lambda f + \mu g \in P$. Ainsi P est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

➤ On fait de même pour I .

➤ Montrons que $P \oplus I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

✧ *Première idée : existence et unicité de la décomposition.* Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrons que f s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de P et d'un élément de I . Procédons par analyse-synthèse.

◆ *Analyse.* Supposons qu'il existe $f_1 \in P$ et $f_2 \in I$ telles que $f = f_1 + f_2$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\star f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

$$\star f(-x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Par demi-somme et demi-différence terme à terme, on a nécessairement :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ et } f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Ces expressions étant uniques, on peut donc déjà valider l'unicité de l'éventuelle décomposition.

◆ *Synthèse.* En définissant f_1 et f_2 comme ci-dessus, on constate que :

$$\star f = f_1 + f_2;$$

$$\star f_1 \in P \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, f_1(-x) = f_1(x).$$

$$\star f_2 \in I \text{ (idem).}$$

Ceci prouve l'existence de la décomposition.

Ainsi $F = P \oplus I$, donc P et I sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

✧ *Deuxième idée : on connaît cet exercice de début d'année et on veut « faire vite ».*

◆ $P \cap I = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$ puisque la seule fonction à la fois paire et impaire est clairement la fonction nulle.

◆ $P + I \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est évident puisqu'on a montré précédemment que P et I sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; et, si $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'écriture $f = p + i$ avec $p = \frac{f+f(-\cdot)}{2}$ et $i = \frac{f-f(-\cdot)}{2}$ valide instantanément l'inclusion $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset P + I$. D'où $P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

33 - solution On commence par identifier facilement $G = \text{Vect}(\cos, \sin)$.

Idée 1 : analyse-synthèse. Et la décomposition est marquée ci-dessous.

Idée 2 : on peut aussi prouver que $F \cap G = \{0\}$ et trouver une décomposition astucieusement...

➤ Soit $f \in F \cap G : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}; f = \lambda \cos + \mu \sin$. Alors $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi) \Leftrightarrow \lambda = \mu = -\lambda$, soit $\lambda = \mu = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.

➤ Soit $f \in E$. Posons $\lambda = \frac{1}{2}(2f(\frac{\pi}{2}) - f(0) - f(\pi))$ et $\mu = \frac{1}{2}(f(0) - f(\pi))$. Puis $f_2 = \lambda \cos + \mu \sin$, et $f_1 = f - f_2$. On a $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$. Donc $E = F + G$.

Ainsi $E = F \oplus G$, i.e. F et G sont supplémentaires dans E .

34 - solution Explicitons E par analyse-synthèse.

➤ *Analyse.* Soit $f \in E$. Alors il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]-1, 0[, f(x) = ax + b$ et $\forall x \in]0, 1[, f(x) = cx + d$. Par continuité de f en 0, on a $b = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = d$.

Donc $\forall x \in]-1, 0[, f(x) = ax + b$ et $\forall x \in]0, 1[, f(x) = cx + b$, égalités valables respectivement en -1 et en 1 par continuité.

Définissons alors les fonctions $\alpha = 1$, $\beta : x \mapsto x \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ et $\gamma : x \mapsto x \mathbb{1}_{[-1,0]}(x)$. On a $f = a\gamma + c\beta + b\alpha$.

➤ *Synthèse.* On vérifie sans peine que f est continue sur $[-1, 1]$ et affine sur $]-1, 0[$ et $]0, 1[$.

En conclusion, $E = \text{Vect}(\alpha, \beta, \gamma)$.

On justifie enfin que la famille (α, β, γ) est libre. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifient $a\gamma + c\beta + b\alpha = 0$, alors en évaluant en $-1, 0$ et 1 , il vient :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

On en tire facilement que $a = b = c = 0$, donc la famille (α, β, γ) est libre et c'est donc une base de E .

Finalement, E est de dimension 3.

35 - solution $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = P'(1) = 0\} = \{(X-1)^2 Q, Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\} = \text{Vect}((X-1)^2 X^i)_{i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket}$. La famille $\mathcal{F}_1 = ((X-1)^2 X^i)_{i \in \llbracket 2, n \rrbracket}$ est par ailleurs étagée en degré (et ne contient pas le polynôme nul), donc elle est libre, donc c'est une base de F .

On pose $\mathcal{F}_2 = (1, X)$. $\mathcal{B} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est étagée en degré (et ne contient pas le polynôme nul) donc elle est libre. Formée de $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. De fait, $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(\mathcal{F}_2)$ est un supplémentaire de F .

36 - solution $\Leftarrow$ Immédiat.

$\Rightarrow$ Supposons $F \cap G = F + G$. Montrons que $F = G$.

Il suffit, par symétrie des rôles de F et G , de montrer que $F \subset G$.

Soit $x \in F$. $x = x + 0_E \in F + G = F \cap G$ donc $x \in G$. D'où le résultat.

37 - solution Supposons par l'absurde que H soit un sous-espace vectoriel de E . $\{0_E\} \neq F \neq E$ donc il existe $u \in F \setminus \{0\}$ et $v \in G \setminus F$. Observons $u + v$:

$\triangleright u + v \notin G$, sinon $u = (u + v) - v \in G$ ce qui n'est pas ;

$\triangleright u + v \notin F$, sinon $v = (u + v) - u \in F$ ce qui n'est pas.

Absurde car $u + v \in E = F \cup H$.

38 - solution Il reste à prouver $H \subset G$. Soit $x \in H$. On écrit $x = 0 + x \in F + H$ et $x = x_1 + x_2 \in F + G$. Alors $x_1 = x - x_2$: or $x \in H$, $x_2 \in G \subset H$ donc $x_1 \in F \cap H \subset F \cap G$. Donc $x \in G$.

39 - solution On écrit :

$$\{(x + y, x - 2, x - y), x, y \in \mathbb{C}\} = (0, -2, 0) + \{(x + y, x, x - y), x, y \in \mathbb{C}^2\} = (0, -2, 0) + \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, -1)).$$

Ainsi, cet ensemble est bien un sea, dont un point est $(0, -2, 0)$, la direction est $\text{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, -1))$, de dimension 2, donc ce sea est de dimension 2.

40 - solution $E = \{P \in \mathbb{K}_n[X], P(1) = 1\} = 1 + \{P \in \mathbb{K}_n[X], P(1) = 0\}$ donc E est un sea de $\mathbb{K}_n[X]$ dont un point est le polynôme constant égal à 1 et dont la direction est le sev $D = \{P \in \mathbb{K}_n[X], P(1) = 0\}$. Il est classique de montrer que ce sev est un hyperplan ce qui permet de conclure que E est un hyperplan affine de $\mathbb{K}_n[X]$.

41 - solution $\triangleright$ Sev. Disjonction de cas.

$\diamond$ Si $t \neq 2$, $0_{\mathbb{R}^4} \notin F_{s,t}$ donc $F_{s,t}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^4$.

$\diamond$ Supposons maintenant $t = 2$.

$\blacklozenge$ Si $s \neq 0$, $(-s^2, 0, 1, 0) \in F_{s,t}$, mais $2(-s^2, 0, 1, 0) \notin F_{s,t}$ donc $F_{s,t}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^4$.

$\blacklozenge$ Si $s = 0$ (et $t = 2$), alors $F_{s,t} = \text{Vect}((-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1))$.

$\triangleright$ Sea. Disjonction de cas, en reprenant les cas précédents en commençant par la fin.

$\diamond$ Si $s = 0$ et $t = 2$, $F_{s,t}$ est un sev donc un sea de direction lui-même.

$\diamond$ Si $s = 0$ et $t \neq 2$, $F_{0,t} = (2 - t, 0, 0, 0) + F_{0,0}$. Comme $F_{0,0}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$ selon précédemment, $F_{0,t}$ est un sea de $\mathbb{R}^4$, de direction $F_{0,t}$.

$\diamond$ Supposons $s \neq 0$. Supposons par l'absurde que $F_{s,t}$ est un sea de direction $G_{s,t}$.

On pose $x = (2 - t - s^2, 0, 1, 0) \in F_{s,t}$, on a donc :

$$\begin{aligned} G_{s,t} &= \{y - x, y \in F_{s,t}\} \\ &= \{(a - 2 + t + s^2, b, c - 1, d), a + t(b - d + 1) + (sc)^2 = 2\} \\ &= \{(-tb + td - (sc)^2, b, c - 1, d), (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

Or, cet ensemble n'est pas un sev de $\mathbb{R}^4$... Absurde. Donc $F_{s,t}$ n'est pas un sea dès que $s \neq 0$.

42 - solution Déjà, justifions que $(a + F) \cap (b + G) \neq \emptyset$.

Observons $b - a$: comme $a, b \in E$, $b - a \in E = F \oplus G$, donc il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $b - a = f + g$. De fait, $b - g = a + f \in (a + F) \cap (b + G)$ et $(a + F) \cap (b + G)$ n'est pas vide, il contient $a + f$.

Soit $p \in (a + F) \cap (b + G)$. Alors il existe $(f', g') \in F \times G$ tel que $p = a + f' = b + g'$. Or, $b - a = f' - g' = f + g$. Comme la somme $F + G$ est directe, on a nécessairement $f' = f$ (et $g' = -g$) donc $p = a + f$. Bref, $a + f$ est le seul point de $(a + F) \cap (b + G)$.

En conclusion, $(a + F) \cap (b + G)$ est réduit à un point.