MATH

Fractions rationnelles

Exercices 20

Arithmétique des polynômes

1 ☆☆☆

Expliciter le PGCD de $X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 5X - 6$ et $X^5 - 2X^4 - 2X^3 + 4X^2 + X - 2$.

2 ☆☆☆

Montrer que deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement leur somme et leur produit le sont.

3 ★☆☆ ♡

Montrer que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1$.

4 ★☆☆ ♥

Soit P un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.

1. Montrer que, si P est à racines simples, $P \wedge P' = 1$.
2. Identifier $P \wedge P'$ dans le cas général.

5 ★★☆ ♡

On pose $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Montrer que (P_n) est une suite de polynômes à coefficients entiers dont on donnera le degré.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1} = 1$.
3. Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, P_{n-1} et P_n sont premiers entre eux.
4. Montrer que : $\forall (n, p) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbb{N}^*$, $P_{n+p} = P_n P_{p+1} - P_{n-1} P_p$.
5. Montrer que $P_{n+p} \wedge P_p = P_n \wedge P_p$ puis $P_n \wedge P_p = P_{n \wedge p}$.

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

6 ★☆☆ ♥

DES dans $\mathbb{R}(X)$: $\dfrac{X^5 - 3X^3 - 3X}{X^4 - 3X^2 - 4}$.

7 ★☆☆ ✍

DES dans $\mathbb{R}(X)$: $\dfrac{X^2 + 2}{X^3 - 2X^2 + X}$.

8 ★☆☆

DES dans $\mathbb{R}(X)$: $\dfrac{7X^2 + 4X - 4}{X^4 - 4X^2}$.

9 ★☆☆ **Extrait CCinP PSI 24**

DES dans $\mathbb{R}(X)$: $\dfrac{6X^2 + 6X - 4}{X^3 - X^2 - X + 1}$.

10 ★☆☆ ✍

DES dans $\mathbb{R}(X)$: $\dfrac{X}{(X+1)^2(X^2 + 3X + 2)}$.

11 ★☆☆ ♡

DES dans $\mathbb{R}(X)$: $\dfrac{X}{X^3 - 1}$.

12 ★☆☆ Ⓐ

DES dans $\mathbb{R}(X)$: $\dfrac{X^4 + 1}{X(X^2 + X + 1)^2}$.

13 ★☆☆ ✍

DES dans $\mathbb{R}(X)$: $\dfrac{X^7 - X^5 - X^3 + 2X}{X^6 - X^4 - X^2 + 1}$.

14 ★★☆ ✍ ♡

Soit $P(X) = (X - 1)^7 - X^7 + 1$. On note $j = e^{2i\pi/3}$.

1. Calculer $P(1)$, $P(-j)$, $P'(-j)$. Factoriser P dans $\mathbb{R}$.
2. Décomposer $\dfrac{1}{P(X)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$

15 ☆☆☆ ♥

DES dans $\mathbb{C}(X)$: $\dfrac{1}{X^3+X^2+X+1}$.

16 ★☆☆ ✍ ♡

DES dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$: $\dfrac{1}{X(X^2+1)^2}$.

17 ★☆☆ ✍

DES dans $\mathbb{C}(X)$: $\dfrac{X^7+1}{(X-i)^2X^3}$.

18 ★★☆ ✍

DES dans $\mathbb{C}(X)$: $\dfrac{1}{X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1}$.

Applications de la décomposition en éléments simples

19 ★☆☆ ✍ ♥

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$: $\dfrac{4}{X(X+1)(X+2)}$.
2. En déduire :
   (a) pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{4}{x(x+1)(x+2)}$;
   (b) pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{4}{k(k+1)(k+2)}$, puis la limite de S_n quand $n \to +\infty$;
   (c) pour $x \in [1\,,+\infty[$, la valeur de $I_x = \displaystyle\int_1^x \dfrac{4\ \mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)}$, puis la limite de I_x quand $x \to +\infty$.

20 ★☆☆ ✍ **Mines-Telecom MP 19**

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(X-1)^2(X^2-2X+5)}$.
2. Calculer, pour $x \in \,]-\infty\,,1[$, $\displaystyle\int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2(t^2-2t+5)}\ \mathrm{d}t$.

21 ☆☆☆ Ⓐ ♡

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n > 0$, tel que $P(0) \neq 0$ et admettant n racines réelles deux à deux distinctes x_k. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}.$$

Indications

3 - indication *Idée rapide.* Algorithme d'Euclide. *Idée plus laborieuse.* Avec la factorisation par les racines de l'unité.

5 - indication 2. Voir que $P_{n+1}^2 - P_{n+2}P_n = P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1}$ en jonglant avec la relation de récurrence définissant la suite (P_n).

12 - indication Simplifier : $\dfrac{1}{X(X^2+1)^2} - \dfrac{1}{X}$ et effectuer la dévision euclidienne de son numérateur par X^2+1.

16 - indication Déduire celle dans $\mathbb{R}(X)$ de celle dans $\mathbb{C}(X)$...

21 - indication Décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P}$.

Solutions

1 - solution Posons $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 5X - 6$ et $Q = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + 4X^2 + X - 2$.

➢ *Première méthode. Décomposer P et Q en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}$.*
$P = (X-3)(X-1)^2(X+1)(X+2)$ et $Q = (X-2)(X-1)^2(X+1)^2$.
On en déduit directement que $P \wedge Q = (X-1)^2(X+1)$.

➢ *Deuxième méthode. Algorithme d'Euclide.* On note $R_0 = P$ et $R_1 = Q$.

✧ $R_0 = R_1 + R_2$ avec $R_2 = -4X^3 + 4X^2 + 4X - 4$.

✧ $R_1 = R_2 Q + R_3$ avec $Q_3 = -\frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$ et $R_3 = 0$.

Ainsi, $P \wedge Q$ est le polynôme unitaire associé à R_2, c'est-à-dire $P \wedge Q = -\frac{1}{4}R_2 = X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2(X+1)$.

2 - solution Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. D'après le lemme d'Euclide, $A \wedge B = 1 \iff \begin{cases} (A+B) \wedge A = 1 \\ (A+B) \wedge B = 1 \end{cases}$.
Or, un polynôme est premier avec un produit de polynômes ***ssi*** il est premier avec chacun des termes de ce produit. Donc cette dernière assertion est équivalente à $(A+B) \wedge (AB) = 1$, d'où le résultat.

3 - solution ➢ *Idée 2. Avec le procédé algorithmique d'Euclide.*
Notons r le reste de la DE de n par m : $n = mq + r$. On a $X^n - 1 = (X^m - 1)[X^r(X^{m(q-1)} + \cdots + X^m + 1)] + X^r - 1$.
Ainsi, $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^m - 1) \wedge (X^r - 1)$. On enchaîne alors l'algorithme d'Euclide simultanément sur les polynômes et les exposants entiers, qui s'arrêtent en même temps d'où $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1$.

➢ *Idée 1. Avec la factorisation par les racines de l'unité.*
Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. On montre classiquement que $X^n - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{U}_n} (X - \alpha)$. On a de même $X^m - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{U}_m} (X - \alpha)$.
De ces deux décompositions en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$, on déduit :

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = \prod_{\alpha \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m} (X - \alpha)\,.$$

Or, $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{n \wedge m}$ (exercice d'arithmétique), d'où le résultat.

4 - solution 1. Supposons P à racines simples. Supposons qu'il existe D un polynôme diviseur de P et P' de degré $\geqslant 1$. Comme D divise P, D admet l'une des racines α de P pour racine. Et donc $P'(\alpha) = 0$, ce qui contredit le fait que α est racine simple de P. Ainsi, $P \wedge P' = 1$.

2. Écrivons $P = a \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m(\alpha_i)}$ avec $a \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et $m(\alpha_i) \geqslant 1$.
Quitte à intervertir les α_i, on peut supposer que ceux pour lesquels $m(\alpha_i) \geqslant 2$ sont numérotés $1, \ldots, s$ et ceux pour lesquels $m(\alpha_i) = 1$ sont numérotés $s+1, \ldots, r$ (avec $r = s$ s'il n'y a aucune racine simple pour P).
On a alors $P' = Q \prod_{k=1}^{s} (X - \alpha_i)^{m(\alpha_i)-1}$ où Q est un polynôme qui ne s'annule en aucun des α_i. On peut introduire la forme irréductible de Q dans $\mathbb{K}$: $Q = \prod_{j=1}^{t} (X - \beta_j)^{n(\beta_j)}$ où les β_j sont racines de multiplicité $n(\beta_j)$ de P' ; naturellement, ces β_j ne sont pas racines de P.
On a ainsi les factorisation irréductibles de P et P' :

$$P = a \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m(\alpha_i)} \quad \text{et} \quad P' = a\deg(P) \left(\prod_{k=1}^{s} (X - \alpha_i)^{m(\alpha_i)-1} \right) \left(\prod_{j=1}^{t} (X - \beta_j)^{n(\beta_j)} \right).$$

On en déduit que $P \wedge P' = \prod_{k=1}^{s} (X - \alpha_i)^{m(\alpha_i)-1}$. Ce qui peut se reformuler : $P \wedge P' = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m(\alpha_i)-1}$.

5 - solution 1. Degré : n.

2. Récurrence : clair pour $n = 2$.
Pour l'hérédité, on peut voir que :

$$\begin{aligned}
P_{n+1}^2 - P_{n+2}P_n &= (XP_n - P_{n-1})^2 - (XP_{n+1} - P_n)P_n \\
&= X^2P_n^2 - 2XP_nP_{n-1} + P_{n-1}^2 - XP_{n+1}P_n + P_n^2 \\
&= X^2P_n^2 - 2XP_nP_{n-1} + P_{n-1}^2 - X(XP_n - P_{n-1})P_n + P_n^2 \\
&= X^2P_n^2 - 2XP_nP_{n-1} + P_{n-1}^2 - X^2P_n^2 + XP_{n-1}P_n + P_n^2 \\
&= P_{n-1}(-XP_n + P_{n-1}) + P_n^2 \\
&= P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1}.
\end{aligned}$$

3. Bézout.
4. Fixer n et récurrence sur p.
5. D diviseur commun à P_{n+p} et P_p : divise P_nP_{p+1}. Mais $P_{p+1} \wedge P_p = 1$, donc $P_{p+1} \wedge D = 1$, donc d'après le lemme de Gauss, $D \mid P_n$. Ainsi, D divise le PGCD de P_p et P_n.
Réciproquement, un diviseur commun à P_p et P_n divise $P_nP_{p+1} = -P_{n-1}P_p = P_{n+p}$ donc divise $P_p \wedge P_{n+p}$.
Supposons $p < n$ et posons $n = pq+r$ la DE de n par p. Alors $P_n \wedge P_p = P_{n-p} \wedge P_p = P_{n-2p} \wedge P_p = \cdots = P_r \wedge P_p$.
Alors si on note $a_0 = n$, $a_1 = p$, et $a_2,\ldots,a_k$, 0 les restes successifs dans l'algo d'Euclide pour le calcul de $n \wedge p = a_k$, on a : $P_n \wedge P_p = P_p \wedge P_{a_1} = \cdots = P_{a_k} \wedge P_0 = P_{a_k} = P_{n \wedge p}$.

6 - solution DE : $\frac{X^5-3X^3-3X}{X^4-3X^2-4} = X + \frac{X}{(X-2)(X+2)(X^2+1)}$. On note $F(X) = \frac{X}{(X-2)(X+2)(X^2+1)}$.
Th de DES : il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $F(X) = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X+2}$.

- F est impaire donc $b = 0$ et $c = d$.
- Cache : $c = \frac{1}{10}$.
- Observation de la limite en $+\infty$ de $xF(x)$: $0 = a + c + d$ donc $a = -\frac{1}{5}$.

Bilan : $\frac{X^5-3X^3-3X}{X^4-3X^2-4} = X + \frac{X}{(X-2)(X+2)(X^2+1)} = X - \frac{X}{5(X^2+1)} + \frac{1}{10(X-2)} + \frac{1}{10(X+2)}$.

7 - solution $\frac{X^2+2}{X^3-2X^2+X} = \frac{2}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2}$.

8 - solution $\frac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2} = \frac{2}{X-2} - \frac{1}{X+2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}$.

9 - solution $\deg(6X^2 + 6X - 4) < \deg(X^3 - X^2 - X + 1)$ donc la partie entière est nulle.
$X^3 - X^2 - X + 1$ s'annule en 1, on peut factoriser : $X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1)(X^2 - 1) = (X - 1)^2(X + 1)$.
D'après le théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1}.$$

Technique du cache : $b = 4$ et $c = -1$.
En considérant la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $xF(x)$, on obtient $a + c = 6$, donc $a = 7$.

10 - solution $\frac{X}{(X+1)^2(X^2+3X+2)} = \frac{1}{2(X+1)} - \frac{1}{2(X+1)^2} - \frac{X}{2(X^2+3X+2)}$.

11 - solution

- *Idée 1.* On écrit *a priori*, dans $\mathbb{R}$: $\frac{X}{X^3-1} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta X+\gamma}{X^2+X+1}$.
  - Immédiatement : $\alpha = \frac{1}{3}$.
  - Évaluation en 0 : $0 = -\frac{1}{3} + \gamma$ donc $\gamma = \frac{1}{3}$.
  - On multiplie par X et on prend la limite en $+\infty$: $0 = \frac{1}{3} + \beta$ donc $\beta = -\frac{1}{3}$.

  Donc $\frac{X}{X^3-1} = \frac{1}{3(X-1)} - \frac{X-1}{3(X^2+X+1)}$.
- *Idée 2.* Passer dans $\mathbb{C}$ avec racines toutes simples. Et regrouper les conjugués.

12 - solution Th de DES : $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\frac{X^4+1}{X(X^2+1)^2} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta X+\gamma}{X^2+X+1} + \frac{\delta X+\varepsilon}{(X^2+X+1)^2}$.
Méthode du cache : $\alpha = 1$.
Ensuite, on peut simplifier : $\frac{X^4+1}{X(X^2+X+1)^2} - \frac{1}{X} = -\frac{2X^2+3X+2}{(X^2+X+1)^2}$.
Or (DE de $2X^2 + 3X + 2$ par $X^2 + X + 1$) : $2X^2 + 3X + 2 = 2(X^2 + X + 1) + X$.
D'où : $\frac{X^4+1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{2}{X^2+X+1} - \frac{X}{(X^2+X+1)^2}$.

13 - solution On commence par la partie entière. Par DE, $\frac{X^7-X^5-X^3+2X}{X^6-X^4-X^2+1} = X + \frac{X}{X^6-X^4-X^2+1}$.
On note $F = \frac{X}{X^6-X^4-X^2+1}$.
Stratégie 1. On décompose $F(X)$ dans $\mathbb{C}(X)$ et on en déduira la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.

- Factorisation : $X^6 - X^4 - X^2 + 1 = (X - 1)^2(X + 1)^2(X - i)(X + i)$.
- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$, il existe un unique $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{C}^6$ tel que :

$$F = \frac{X}{(X-1)^2(X+1)^2(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{X-i} + \frac{f}{X+i}.$$

  - F est à coefficients réels donc $f = \overline{e}$.

- ✧ F est impaire, donc $b = a$, $d = -c$, $f = e$ (donc $e \in \mathbb{R}$).
- ✧ Cache : $c = \frac{1}{8}$ et $e = \frac{1}{8}$. D'où $d = -\frac{1}{8}$ et $f = \frac{1}{8}$.
- ✧ À ce stade, $F = \frac{a}{X-1} + \frac{a}{X+1} + \frac{1/8}{(X-1)^2} - \frac{1/8}{(X+1)^2} + \frac{1/8}{X-i} + \frac{1/8}{X+i} = \frac{a}{X-1} + \frac{a}{X+1} + \frac{1/8}{(X-1)^2} - \frac{1/8}{(X+1)^2} + \frac{X/4}{X^2+1}$.
  On multiplie par X et on prend la limite en $+\infty$: $0 = 2a + \frac{1}{4}$, donc $a = -\frac{1}{8}$.

Bilan : $\frac{X^7-X^5-X^3+2X}{X^6-X^4-X^2+1} = X - \frac{1}{8(X-1)} - \frac{1}{8(X+1)} + \frac{1}{8(X-1)^2} - \frac{1}{8(X+1)^2} + \frac{X}{4(X^2+1)}$.

Stratégie 2. On décompose directement $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.

- ➢ Factorisation : $X^6 - X^4 - X^2 + 1 = (X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)$.
- ➢ D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$, il existe un unique $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ tel que :
  $$F = \frac{X}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{eX+f}{X^2+1}.$$
  - ✧ F est impaire donc $b = a$, $d = -c$, $f = 0$.
  - ✧ Cache : $c = \frac{1}{8}$. D'où $d = -\frac{1}{8}$.
  - ✧ On simplifie : $F(X) - \frac{1}{8(X-1)^2} + \frac{1}{8(X+1)^2} = -\frac{X}{2(X-1)(X+1)(X^2+1)}$.
  - ✧ Cache : $a = -\frac{1}{8}$. D'où $b = -\frac{1}{8}$.

  - ✧ On multiplie par X et on prend la limite en $+\infty$: $0 = a + b + e$ donc $e = \frac{1}{4}$.

On trouve également $\frac{X^7-X^5-X^3+2X}{X^6-X^4-X^2+1} = X - \frac{1}{8(X-1)} - \frac{1}{8(X+1)} + \frac{1}{8(X-1)^2} - \frac{1}{8(X+1)^2} + \frac{X}{4(X^2+1)}$.

14 - solution 1. On calcule : $P(1) = P(-j) = P'(-j) = 0$.
On en déduit que :
- ➢ 1 est racine de P ;
- ➢ $-j$ est racine multiple de P, ce qui entraîne également que $-\overline{j}$ est racine multiple de P, puisque $P \in \mathbb{R}[X]$.

De plus, 0 est racine évidente de P. Par conséquent, P se factorise par $X(X-1)(X+j)^2(X+\overline{j})^2$.
Par ailleurs, P est de degré < 7 puisque les termes de degré 7 se télescopent.
Le coefficient de degré 6 dans P est -7, donc $P = -7(X-1)(X+j)^2(X+\overline{j})^2$.
En regroupant les termes conjugués : $P = -7X(X-1)(X^2-X+1)^2$.

2. D'après le théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, il existe un unique $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ tel que $\frac{1}{P} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1} + \frac{eX+f}{(X^2-X+1)^2}$.
   - ➢ *Observation du type « parité ».* On observe la transformation $X \mapsto 1-X$: $\frac{1}{P(1-X)} = \frac{1}{P(X)}$.
     Comme $(1-X)^2 - (1-X) + 1 = X^2 - X + 1$, cela entraîne :
     $$\frac{-b}{X} + \frac{-a}{X-1} + \frac{-cX+(c+d)}{X^2-X+1} + \frac{-eX+(e+f)}{(X^2-X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1} + \frac{eX+f}{(X^2-X+1)^2}.$$
     Par unicité de la décomposition en éléments simples : $-b = a$, $-c = c$, $c+d = d$, $-e = e$ et $e+f = f$, soit $b = -a$ et $c = e = 0$.
   - ➢ Technique du cache : $a = \frac{1}{7}$; et, *a fortiori*, $b = -\frac{1}{7}$.
   - ➢ À ce stade, on a $\frac{1}{P} = \frac{1/7}{X} - \frac{1/7}{X-1} + \frac{d}{X^2-X+1} + \frac{f}{(X^2-X+1)^2}$, soit :
     $$\frac{-1/7}{X(X-1)(X^2-X+1)^2} = \frac{-1/7}{X(X-1)} + \frac{d}{X^2-X+1} + \frac{f}{(X^2-X+1)^2}.$$
     On multiplie par X^2 et on prend la limite en $+\infty$: $0 = -\frac{1}{7} + d$, donc $d = \frac{1}{7}$.
   - ➢ On finit par évaluer en -1 ce qui permet d'obtenir $-\frac{1}{2.3^2.7} = -\frac{1}{7} + \frac{1}{2.7} + \frac{1}{3.7} + \frac{f}{3^2}$, soit $f = \frac{1}{7}$.

   Bilan : $\frac{1}{P} = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X^2-X+1} + \frac{1}{(X^2-X+1)^2}\right)$.
   Remarque : on peut s'en sortir sans la remarque sur la transformation $X \mapsto 1-X$, en passant par la décomposition sur $\mathbb{C}$ par exemple, mais c'est plus calculatoire...

15 - solution Notons $F = \frac{1}{X^3+X^2+X+1}$.
- ➢ $\deg(F) < 0$, donc la partie entière est nulle.
- ➢ Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ de $Q = X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X-i)(X+i)$.

- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$, il existe un unique $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{X+i}$.
- Comme $F \in \mathbb{R}(X)$, $c = \overline{b}$.
- Technique du cache : $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1+i}{4}$.

Finalement, $F = \frac{1}{2(X+1)} - \frac{1+i}{4(X-i)} - \frac{1-i}{4(X+i)}$.

16 - solution Comme on veut décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$, on commence par la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ et on en déduit celle dans $\mathbb{R}(X)$.

- Dans $\mathbb{C}(X)$. D'après le théorème de DES, il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$ tels que :
$$F(X) = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-i} + \frac{\gamma}{(X-i)^2} + \frac{\delta}{X+i} + \frac{\varepsilon}{(X+i)^2}.$$
Comme $F(X) \in \mathbb{R}(X)$, $\delta = \overline{\beta}$ et $\varepsilon = \overline{\gamma}$.
Cache : $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{i}{4}$.
On simplifie : $F(X) - \frac{1}{X} - \frac{i}{4(X-i)^2} + \frac{i}{4(X+i)^2} = \frac{-X^2(X^2+1)}{X(X^2+1)^2} = -\frac{X}{X^2+1}$. Cache : $\beta = -\frac{1}{2}$.
Bilan : $\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{2(X-i)} + \frac{i}{4(X-i)^2} - \frac{1}{2(X+i)} - \frac{i}{4(X+i)^2}$..
- On déduit celle dans $\mathbb{R}(X)$ de celle dans $\mathbb{C}(X)$ en développant :
  - $-\frac{1}{2(X-i)} - \frac{1}{2(X+i)} = -\frac{X}{X^2+1}$;
  - $\frac{i}{4(X-i)^2} - \frac{i}{4(X+i)^2} = -\frac{X}{(X^2+1^2}$.

  Ainsi, $\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$.

Notons que l'on peut décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ directement...
D'après le théorème de DES, il existe $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$ tels que $F(X) = \frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2}$.
Cache : $a = 1$. Pour les autres coefficients, deux stratégies.

- *On isole et on simplifie.*
On simplifie : $F(X) - \frac{1}{X} = \frac{-X^3-2X}{(X^2+1)^2}$. DE : $-X^2 - 2X = -X(X^2+1) - X$. Donc $\frac{-X^3-2X}{(X^2+1)^2} = -\frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$.
- *On observe parité, limite, évaluation...*
  - *On note que la fonction est impaire de sorte que $c = e = 0$.*
  - *En prenant la limite en $+\infty$ de $XF(X)$, il vient $0 = 1 + b$ donc $b = -1$.*
  - *En évaluant en 1, il vient $-\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{d}{4}$, soit $d = -1$.*

Dans tous les cas, on a obtenu : $\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$.

17 - solution $\frac{X^7+1}{(X-i)^2X^3} = X^2 + 2iX - 3 - \frac{3+4i}{X-i} + \frac{1+i}{(X-i)^2} + \frac{3}{X} + \frac{2i}{X^2} - \frac{1}{X^3}$.

18 - solution Notons $F = \frac{1}{X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1}$.

- $\deg(F) < 0$, donc la partie entière est nulle.
- Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ de $Q = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + X - 1 = (X-1)(X-i)^2(X+i)^2$.
- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$, il existe un unique $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{C}^5$ tel que $F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{(X-i)^2} + \frac{d}{X+i} + \frac{e}{(X+i)^2}$.
- $F \in \mathbb{R}(X)$ donc $d = \overline{b}$ et $e = \overline{c}$.
- Technique du cache : $a = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{1+i}{8}$. *A fortiori*, $e = \frac{1-i}{8}$.
- Ensuite, $\tilde{F} = F - \frac{a}{X-1} - \frac{c}{(X-i)^2} - \frac{e}{(X+i)^2} = -\frac{1}{4}\frac{X+2}{X^2+1}$.
Cette dernière fraction rationnelle est égale à $\frac{b}{X-i} + \frac{c}{(X-i)^2}$. Méthode du cache : $b = \frac{-1+2i}{8}$. Et $d = \frac{-1-2i}{8}$.

Finalement, $F = \frac{1}{4(X-1)} - \frac{1-2i}{8(X-i)} + \frac{1+i}{8(X-i)^2} - \frac{1+2i}{8(X+i)} + \frac{1-i}{8(X+i)^2}$.

19 - solution 1. $\frac{4}{X(X+1)(X+2)} = \frac{2}{X} - \frac{4}{X+1} + \frac{2}{X+2}$.

2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On observe que la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. On en déduit que $f : x \mapsto \frac{4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x} - \frac{4}{x+1} + \frac{2}{x+2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,-1,0\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,0\}$, $f^{(n)}(x) = 2(-1)^n n! \left(\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{2}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la DES et par télescopage :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)(k+2)} \\ &= 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}\right) \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(c) Soit $x \in [1\,,+\infty[$. Avec la DES, on a :

$$I_x = \int_1^x \frac{4\ \mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)} = 2\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} - 4\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + 2\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t+2} = 2\ln(x) - 4\ln(x+1) + 2\ln(x+2) + 4\ln(2) - 2\ln(3).$$

On réécrit : $I_x = \ln\left(\frac{x^2(x+2)^2}{(x+1)^4}\right) + \ln\left(\frac{16}{9}\right)$.

Or, $\frac{x^2(x+2)^2}{(x+1)^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2x^2}{x^4} \sim 1 \to 1$. OA : $I_x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{16}{9}\right)$.

20 - solution

1. D'après le théorème de DES, il existe un unique quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\frac{1}{(X-1)^2(X^2-2X+5)} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2} + \frac{\gamma X+\delta}{X^2-2X+5}$.
   - Cache : $\beta = \frac{1}{4}$.
   - On simplifie : $\frac{1}{(X-1)^2(X^2-2X+5)} - \frac{1}{4(X-1)^2} = \frac{4-(X^2-2X+5)}{4(X-1)^2(X^2-2X+5)} = \frac{-(X-1)^2}{4(X-1)^2(X^2-2X+5)} = \frac{-1/4}{(X^2-2X+5)}$.

   Bref, $\frac{1}{(X-1)^2(X^2-2X+5)} = \frac{1/4}{(X-1)^2} - \frac{1/4}{(X^2-2X+5)}$. Autrement dit : $\alpha = 0 = \gamma$, $\beta = \frac{1}{4} = -\delta$.
2. Soit $x \in]-\infty\,,1[$. $f : t \mapsto \frac{1}{(t-1)^2(t^2-2t+5)}$ est continue sur $]-\infty\,,1[$ donc sur $[0\,,x]$ donc l'intégrale est bien définie.
   Avec la DES : $\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} - \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t+5}$.
   - $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} = \left[-\frac{1}{t-1}\right]_0^x = \frac{x}{1-x}$.
   - $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t+5} = \left[\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t-1}{2}\right)\right]_0^x = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$.

   Conclusion : $\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{x}{4(1-x)} + \frac{1}{8}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{1}{8}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$.

21 - solution Comme les racines de P sont simples, on peut écrire la DES : $\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-x_k}$, avec $a_k = \frac{1}{P'(x_k)}$. Il suffit alors d'évaluer en 0.