MATH

Convexité

Exercices 15

Inégalités de convexité

1 ☆☆☆ ♥

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
3. En déduire que $\forall a, b \in]1, +\infty[$, $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

2 ★☆☆ ♥

Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

3 ★☆☆

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$ et $c(x) = \dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$.
On pose, pour tout $x \in [a, b]$: $g(x) = f(x) - Mc(x)$ et $h(x) = f(x) + Mc(x)$.

1. Justifier l'existence de M.
2. Montrer que g est convexe et que h est concave.
3. En déduire : $\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leqslant Mc(x)$.

4 ★★☆ Ⓐ

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe $\mathscr{C}^1$. Montrer :

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

5 ☆☆☆ Ⓐ ♥

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Prouver l'inégalité arithmético-harmonique :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

6 ★☆☆ Ⓐ

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer :

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

Propriétés des fonctions convexes

7 ☆☆☆ 🚲

Montrer qu'une fonction convexe sur un segment $[a, b]$ est majorée et atteint son maximum en a ou en b.

8 ☆☆☆ ♥

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes.

1. Montrer que, si g est croissante, $g \circ f$ est convexe.
2. Le résultat persiste-t-il si g n'est pas croissante ?

9 ★☆☆

Soit f une application strictement croissante et convexe sur un intervalle I et à valeurs réelles. Étudier la convexité de l'application réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$. Qu'en est-il si l'on remplace « croissante » par « décroissante » ?

10 ★☆☆

Montrer qu'une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.

Indications

4 - indication Positionner la courbe de f par rapport à sa grande corde et à sa tangente en $\dfrac{a+b}{2}$.

5 - indication Inégalité de Jensen appliquée à la fonction inverse.

6 - indication Appliquer l'inégalité de Jensen à ln en nommant chaque fraction y_k.

Solutions

1 - solution

1. exp est convexe.
2. $f'' < 0$.
3. Soient $a, b \in]1, +\infty[$. D'après la question 2, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) = \ln\left(\sqrt{\ln(a)\ln(b)}\right)$. En appliquant l'exponentielle, on obtient le résultat.

2 - solution sin est concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc :

- $\mathscr{C}_{\sin}$ est en-dessous de sa tangente en 0 : $\sin(x) \leqslant x$;
- $\mathscr{C}_{\sin}$ est au-dessus de sa corde reliant les deux extrémités du segment : $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x)$.

3 - solution

1. f'' est continue sur le segment $[a, b]$, donc $|f''|$ aussi. D'après le théorème des bornes atteintes, $|f''|$ est bornée et atteint ses bornes. *A fortiori*, sa borne supérieure est bien définie (et c'est d'ailleurs un maximum).
2. Soit $x \in [a, b]$. On a $g''(x) = f''(x) + M$. Or, $-M \leqslant f''(x) \leqslant M$ donc $g''(x) \geqslant 0$. Par conséquent, g est convexe. Le même calcul permet d'observer que $h'' \leqslant 0$ donc h est concave.
3. Par convexité, $\mathscr{C}_g$ est au-dessous de sa corde reliant $(a, g(a))$ et $(b, g(b))$. Or, $g(a) = g(b)$ donc cette corde a pour équation $y = 0$. D'où $\forall x \in [a, b]$, $g(x) \leqslant 0$.
   On montre de même que $\forall x \in [a, b]$, $h(x) \geqslant 0$.
   On en conclut que $\forall x \in [a, b]$, $-Mc(x) \leqslant f(x) \leqslant Mc(x)$, soit $|f(x)| \leqslant Mc(x)$.

4 - solution Par convexité de f :

- $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de sa grande corde, donc $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$.
  Par positivité de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x + (b-a)f(a) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$.
- $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$: $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
  Encore par positivité de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

5 - solution Posons $f = \frac{1}{\cdot}$: convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. D'après l'inégalité de Jensen : $f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))$.
Il suffit de passer à l'inverse pour conclure.

6 - solution Posons $y_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$, $y_n = \frac{x_n}{x_1}$.
Inégalité de Jensen avec $\lambda_k = \frac{1}{n}$: $\ln\left(\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}(\ln(y_1) + \cdots + \ln(y_n))$.
Or, $\ln(y_1) + \cdots + \ln(y_n) = \ln(y_1 \times \cdots \times y_n) = \ln(1) = 0$.
Puis : passage à l'exponentielle.

7 - solution $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de sa grande corde $\mathcal{C}$, qui représente une fonction affine, atteignant son maximum sur $[a, b]$ en a ou en b ; et $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{C}$ coïncident en a et b, d'où le résultat.

8 - solution

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $t \in [0, 1]$.
   Comme f est convexe, $f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$.
   Par croissance de g, $g(f((1-t)x + ty)) \leqslant g((1-t)f(x) + tf(y))$.
   Et, par convexité de g, $g(f((1-t)x + ty)) \leqslant (1-t)g(f(x)) + tg(f(y))$.
   On en conclut que $g \circ f$ est convexe.
2. Le résultat ne tient plus si g n'est pas croissante. Proposons l'exemple suivant.
   Posons $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto (x-1)^2$. f et g sont bien convexes puisque $f'' = g'' = 2 \geqslant 0$.
   Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = \left(x^2 - 1\right)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$, d'où $(g \circ f)''(x) = 4(3x^2 - 1) < 0 \iff x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$.
   Par conséquent, $g \circ f$ n'est pas convexe.

9 - solution Soient $t \in [0, 1]$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.
Comme f est convexe : $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.
Comme f^{-1} est strictement croissante : $f^{-1}(f(tx_1 + (1-t)x_2)) = tx_1 + (1-t)x_2 \leqslant f^{-1}(ty_1 + (1-t)y_2)$, soit $tf^{-1}(y_1) + (1-t)f^{-1}(y_2) \leqslant f^{-1}(ty_1 + (1-t)y_2)$. Donc f^{-1} est concave.
Dans le cas où f est strictement décroissante, le même raisonnement permet de voir que f^{-1} est également convexe.

10 - solution Par l'absurde, supposons f non constante. Alors, il existe $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$.
Quitte à changer f en $x \mapsto f(-x)$, qui est encore convexe, on peut supposer $f(a) < f(b)$.
D'après l'inégalité des pentes, pour $x > b$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Notons $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$ constant par rapport à x. Alors $f(x) \geqslant f(a) + \alpha(x-a) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Absurde.