MATH

Analyse asymptotique

Exercices 13

Entraînement aux développements limités

1 ☆☆☆

$\mathrm{DL}_8(0)$ de Arcsin.

2 ☆☆☆

$\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

3 ★☆☆ Ⓐ

$\mathrm{DL}_3(0)$ de $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

4 ★☆☆ ♥

$\mathrm{DL}_3(1)$ de Arctan.

5 ☆☆☆ ♥ **Mines-Telecom MP 23**

$\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{1}{(1+x)(2-x)}$.

6 ☆☆☆ ✍

$\mathrm{DL}_3(0)$ de $\mathrm{e}^{\sin(x)}$.

7 ★☆☆ ✍ **ENSEA/ENSIIE MP 23**

$\mathrm{DL}_5(0)$ de $\mathrm{e}^{\cos(x)}$.

8 ★☆☆ ♥

$\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(1+\mathrm{e}^x)$.

9 ★☆☆ Ⓐ

$\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(2+\sin(x))$.

10 ★☆☆

$\mathrm{DL}_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de $\sin(x)$.

11 ★☆☆ ♥

$\mathrm{DL}_4(1)$ de $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

12 ☆☆☆

$\mathrm{DL}_2(1)$ de $\dfrac{x-1}{\ln(x)}$.

13 ★☆☆

$\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sqrt{3+\cos(x)}$.

14 ★★☆

$\mathrm{DL}_8(0)$ de $(\tan(x))^3\left((\cos(x))^{x^2}-1\right)$.

Développements limités plus théoriques

15 ★★☆ Ⓐ ♡

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\ln\left(1+x^2\right)$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Sa bijection réciproque f^{-1} admet-elle un $\mathrm{DL}_3(0)$? Si oui, le calculer.

Limites de suites

16 ☆☆☆ ♥

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$.

17 ☆☆☆

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+n}{2^n}$.

18 ☆☆☆

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(n+1)^3-\left(\frac{\mathrm{e}+\pi}{5}\right)^n+\sin(n!)\operatorname{Arctan}(n)$.

19 ☆☆☆ ♥

Calculer $\lim \dfrac{(2n)!}{n!n^n}$.

20 ★★☆ ✍ ♡ **Centrale PC**

Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. Déterminer $\lim u_n$ lorsque $x\in\mathbb{R}$ puis lorsque $x\in\mathbb{C}$.

Équivalents de suites

21 ☆☆☆ ♥

Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de $\left(\sqrt{n} - [\ln(n)]^{7/2} + \sin(n)\right)$.

22 ☆☆☆ ♥

Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de $\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$.

23 ☆☆☆ ♥

Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

24 ☆☆☆ ♥

Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de $\left(\dfrac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n^3}} - 1}\right)$.

25 ★☆☆ CCinP MP 23 (banque)

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

26 ★★☆ ✍

Calculer $\lim n^2\left((n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$.

27 ★★☆ ♡ X-ESPCI

On pose $u_0 \in [0, \pi]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle.
2. Déterminer une valeur de $m \in \mathbb{N}^*$ telle que $\dfrac{1}{\sin^m(x)} - \dfrac{1}{x^m}$ admette une limite finie non nulle quand $x \to 0$.
3. On admet le résultat suivant (Maths-MP et Option Info-MPSI).
   Si (v_n) est une suite telle que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, alors $\sum_{k=1}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.
   En déduire un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Comportements asymptotiques de suites

28 ☆☆☆ Extrait CCinP MP 25 (banque)

Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

29 ★★★ ♥

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que f_n s'annule en deux réels, notés u_n et v_n, qui vérifient $u_n < n < v_n$.
2. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$; en déduire que (u_n) est décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) converge vers 1.
   (d) Montrer que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3. (a) Donner la limite de (v_n).
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.
   (c) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

30 ★☆☆ ✍

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\cos \dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$.

Donner la limite (u_n) et un équivalent de $u_n - \mathrm{e}^{-x^2/2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

31 ★★★ ♡ Centrale MP 19

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, on pose $P_n = X^n - nX + 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, P_n admet exactement deux racines $x_n < y_n$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Étude de la suite $(x_n)_{n \geqslant 3}$.
   (a) Montrer que $(x_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante et $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.
   (b) Déterminer un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$.
3. Étude de la suite $(y_n)_{n \geqslant 3}$.
   (a) Montrer que $(y_n)_{n \geqslant 3}$ converge vers une limite ℓ à déterminer.
   (b) Déterminer un équivalent de $y_n - \ell$.

Limites de fonctions

32 ☆☆☆

Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x\,\mathrm{e}^x - x^2}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

33 ☆☆☆ ♥

Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.

34 ★☆☆

Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{\operatorname{Arccos}(x)}$.

35 ★☆☆ ♥

Si $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.

36 ★★☆ TPE-EIVP

Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to \mathrm{e}} \frac{\ln(\ln(x))}{x^2 - 3\,\mathrm{e}\,x + 2\,\mathrm{e}^2}$.

37 ★★☆ Ⓐ ✍ CCinP PC

Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2 + x^4}} - \sin(x)\right)^{\ln(x)}$.

38 ★★☆ Ⓐ ✍ CCinP PC

Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2\,\mathrm{e}^{1/x} - \sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4}$.

Équivalents de fonctions

39 ☆☆☆ ♥

Donner un équivalent simple en 0^+ de $\dfrac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{\sin x}}$.

40 ★☆☆

Donner un équivalent simple en $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$ de $\tan(x)$.

41 ★☆☆

Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)$.

42 ★☆☆ ♥

Trouver un équivalent simple en 0 de $x^x - \sin^x(x)$.

43 ★☆☆

Donner un équivalent simple de $(x+1)\ln(x) - x\ln(x+1)$ en : $0 \quad ; \quad +\infty \quad ; \quad 1$.

Équivalents plus théoriques

44 ★☆☆ ♥

Soit $(a, b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$. Soient f, g deux fonctions réelles définies au voisinage d'un élément a et φ une fonction définie au

voisinage de b. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.
On cherche à savoir si la proposition suivante est vraie : $\varphi(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(g(x))$.

1. La relation est-elle vraie si $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$?
2. (a) Montrer que cette relation est vraie si $b = 1$ et $\varphi = \exp$.
   (b) Cette relation est-elle vraie en général si $\varphi = \exp$?
3. (a) Montrer que cette relation est vraie si $b = +\infty$ et $\varphi = \ln$.
   (b) Montrer que cette relation est vraie si $b = 0$ et $\varphi = \ln$.
   (c) Cette relation est-elle vraie en général si $\varphi = \ln$?

Comportement asymptotique de fonctions

45 ☆☆☆ ♥

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
Après avoir trouvé le domaine de définition, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au voisinage de $x = 0$ admet une tangente $\mathcal{T}_0$ et étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{T}_0$.

46 ★☆☆

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \dfrac{x^2}{4}$.
Après avoir trouvé le domaine de définition, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au voisinage de $x = 0$ admet une tangente $\mathcal{T}_0$ et étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{T}_0$.

47 ★☆☆ ♥

On pose $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

1. Étudier le domaine de définition.
2. Dresser le tableau de variations.
3. Étudier les asymptotes éventuelles.

48 ★☆☆

Étudier les asymptotes obliques de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 - x + 1}$.

Indications

3 - indication Primitivation.

4 - indication Translation et primitivation.

9 - indication Factoriser dans le ln par 2 et appliquer les relations additives-multiplicatives de ln.

14 - indication Voir qu'il suffit de faire le DL à l'ordre 4 pour le premier terme du produit, et à l'ordre 5 pour le second.

15 - indication 2. Formule de Taylor-Young. Puis poser *a priori* le DL de f^{-1} avec une partie régulière arbitraire sous la forme : $f^{-1}(y) = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + o(y^3)$ et observer l'égalité de neutralisation $f^{-1}(f(x)) = x$.

19 - indication Formule de Stirling.

20 - indication $x \in \mathbb{R}$: notation exponentielle. $x \in \mathbb{C}$: notation exponentielle pour $1 + \frac{x}{n}$.

29 - indication 2.b. Comparer $f_n(u_{n+1})$ et $f_n(u_n)$.
2.c. Raisonner par l'absurde.
3.c. Raffiner l'encadrement précédent en utilisant $v_n = n\ln(v_n)$, puis appliquer le théorème des gendarmes.

31 - indication 2.a. Signe de $P_{n+1}(x_n)$? Puis passage à la limite dans $P_n(x_n) = 0$. 2.b. $(nx_n)^n \to$?
3.a. Montrer que $\ell = 1$ en raisonnant par l'absurde.
3.b. Composer (en justifiant) par ln de part et d'autre de la relation $y_n^n \sim n$.

36 - indication Se ramener en 0 ; factoriser par e dans le logarithme.

37 - indication $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x^4}} - \sin(x)\right)$.

38 - indication Poser $h = \dfrac{1}{x}$; factoriser par h^2 ; $\mathrm{DL}_2(0)$ de facteur restant.

42 - indication Factoriser par x^x puis DL.

44 - indication Étudier la limite en a de $\dfrac{\varphi(f(x))}{\varphi(g(x))}$.

Solutions

1 - solution $\mathrm{Arcsin}'(x) = (1-x^2)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6)$.
Par primitivation : $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^8)$.

2 - solution DL usuel : $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$.
Par substitution de x par $-x$: $\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$.
Par somme, $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{8} + o(x^3)$. Après factorisation par x et division : $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$.

3 - solution $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)$.
Comme $f(0) = \frac{\pi}{4}$, on obtient, par primitivation : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4} + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

4 - solution On commence par poser $x = 1+t$: $t = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. On a alors $\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(1+t)$, ce qui définit une fonction $f : t \mapsto \mathrm{Arctan}(1+t)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(t) = \frac{1}{1+(1+t)^2} = \frac{1}{2+2t+t^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+t+\frac{t^2}{2}} \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)$$

en ayant posé $u = t + \frac{t^2}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Par théorème de primitivation : $\mathrm{Arctan}(1+t) \underset{t\to 0}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{12} + o\left(t^3\right)$.
Retour à x : $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} + o\left((x-1)^3\right)$.

5 - solution On propose deux stratégies.

- *DL d'un produit.* On écrit : $\frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{2-x}$.
  - DL usuel : $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$.
  - $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$.

  Par produit : $\frac{1}{(1+x)(2-x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$.
- *DL d'une somme après DES.* Par DES (élémentaire, technique du cache) : $\frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1/3}{1+x} + \frac{1/3}{2-x}$.
  Par linéarité, en reprenant les DL précédents : $\frac{1}{(1+x)(2-x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$.

6 - solution On sait : $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \to 0$.
Or, $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Par substitution et troncature : $\mathrm{e}^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$.

7 - solution Déjà, $x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$ est $\mathscr{C}^\infty$ paire, donc elle admet un $\mathrm{DL}_5(0)$ dont les coefficients d'indice impair sont nuls. De fait, la partie régulière du $\mathrm{DL}_5(0)$ est égale à la partie régulière de son $\mathrm{DL}_4(0)$. Ainsi, il suffit de déterminer son $\mathrm{DL}_4(0)$.
On sait : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. On substitue : $\mathrm{e}^{\cos(x)} = \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} = \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}$.
On pose $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Or, $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$, donc, après substitution et troncature : $\mathrm{e}^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}x^4 + o\left(x^4\right)$. Et on conclut que $\mathrm{e}^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}x^4 + o\left(x^5\right)$.

8 - solution On propose trois stratégies.

- *Par primitivation.* $f : x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
  Or, $\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $f'(x) = \frac{1}{2-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)}$. On pose $u = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$.
  Comme $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$, on obtient par substitution et troncature : $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + o(x^2)$.
  Par primitivation, $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3)$.

➢ *Par composition.* On sait que $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. On substitue :

$$\begin{aligned}\ln(1+e^x) &= \ln\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\\ &= \ln\left(2\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)\right)\\ &= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right).\end{aligned}$$

On pose alors $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Comme $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, on obtient, après substitution et troncature : $\ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^3\right)$.
On conclut que $\ln(1+e^x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^3\right)$.

➢ *Avec la formule de Taylor-Young.* $f : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
- ✧ $f(0) = \ln(2)$;
- ✧ $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$, donc $f'(0) = \frac{1}{2}$;
- ✧ $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, donc $f''(0) = \frac{1}{4}$;
- ✧ $\forall x \in \mathbb{R},\ f'''(x) = \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}$, donc $f'''(0) = 0$.

D'après la formule de Taylor-Young, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$.

9 - solution On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. On substitue :

$$\begin{aligned}\ln(2+\sin(x)) &= \ln\left(2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\\ &= \ln\left(2\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)\right)\\ &= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right).\end{aligned}$$

On pose alors $u = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Comme $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, on obtient, après substitution et troncature : $\ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o\left(x^3\right)$.
On conclut que $\ln(2+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o\left(x^3\right)$.

10 - solution On pose $u = x - \frac{\pi}{4} \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} 0$. $\sin(x) = \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(u) + \cos(u))$.
Avec les DL usuels, on obtient par linéarité : $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$.
Retour à x : $\sin(x) \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.

11 - solution Posons $u = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. On a alors $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1+u)}{(1+u)^2} = \ln(1+u)(1+u)^{-2}$.
DL usuels :
- ➢ $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$;
- ➢ $(1+u)^{-2} \underset{u\to 0}{=} 1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + 5u^4 + o(u^4)$.

Par produit et troncature : $f(x) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{5}{2}u^2 + \frac{13}{3}u^3 - \frac{77}{12}u^4 + o(u^4)$.
Retour à x : $f(x) \underset{x\to 1}{=} (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right)$.

12 - solution Posons $u = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Comme $\ln(1+u) \underset{x\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, on a :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} = \frac{u}{\ln(1+u)} \underset{u\to 0}{=} \frac{u}{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)} \underset{u\to 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + o(u^2)}.$$

Posons $v = \frac{u}{2} - \frac{u^2}{3} + o(u^2) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$. Comme $\frac{1}{1-v} \underset{v\to 0}{=} 1 + v + v^2 + o(v^2)$, on a $f(x) \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{12}u^2 + o(u^2)$.
Retour à x : $f(x) \underset{x\to 1}{=} 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$.

13 - solution On a : $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$. Donc $\sqrt{3+\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{4-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} 2\left(1-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)^{1/2}$.
Or, $(1+u)^{1/2} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}u+o(u) \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}u+O(u^2)$, donc $\sqrt{3+\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 2-\frac{1}{8}x^2+O\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{=} 2-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^3\right)$.

14 - solution On observe déjà que $\tan(x)\sim x$, donc $\tan^3(x)\sim x^3$, donc le premier terme dans son $\mathrm{DL}_n(0)$ sera x^3. De fait, il suffit de développer le DL(0) de $[\cos x]^{x^2}-1$ à l'ordre 5. Et, compte tenu de la parité, on effectue ce DL(0) à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\cos^{x^2}(x)-1 &= \exp\left(x^2\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\right)-1\\ &= \exp\left(-\frac{x^4}{2}+o(x^5)\right)-1=-\frac{x^4}{2}+o(x^5).\end{aligned}$$

Ensuite, par imparité de tan, $\tan(x)=x+o(x^2)$, donc $\tan^2(x)=x^2+o(x^3)$ et $\tan^3(x)=x^3+o(x^4)$.
On peut alors effectuer le produit : $\tan^3(x)\left(\cos^{x^2}(x)-1\right)=-\frac{x^7}{2}+o(x^8)$.

15 - solution

1. $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: f bijective.
2. Au voisinage de 0, f est $\mathscr{C}^\infty$ et f' ne s'annule pas donc f^{-1} est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 : via Taylor-Young, f^{-1} admet un $\mathrm{DL}_3(0)$: $f^{-1}(y)=\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+o(y^3)$.
Or, en notant $x=f^{-1}(y)$, $y=f(x)=x-\ln(1+x^2)=x-x^2+o(x^3)$; d'où par composition :
$$\begin{aligned}x=f^{-1}(y) &= \alpha(x-x^2)+\beta(x-x^2)^2+\gamma(x-x^2)^3+o(x^3)\\ &= \alpha x+(\beta-\alpha)x^2+(\gamma-2\beta)x^3+o(x^3).\end{aligned}$$
Par unicité du $\mathrm{DL}_3(0)$ de x, il vient : $\alpha=1$, $\beta=1$ et $\gamma=2$. Ainsi $f^{-1}(y)=y+y^2+2y^3+o(y^3)$.

16 - solution Comme $\left|\frac{2}{3}\right|<1$, on a $\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ donc $2^n=o(3^n)$. Ainsi $v_n\sim\frac{-3^n}{3^n}\sim -1$, puis $v_n\to -1$.

17 - solution Par croissances comparées, $n=o(2^n)$ puisque $2^n=e^{n\ln(2)}$ avec $\ln(2)>0$. Donc $s_n\sim\frac{2^n}{2^n}\sim 1$. De fait, $s_n\to 1$.

18 - solution $\frac{\mathrm{e}+\pi}{5}>1$, donc par croissances comparées, $n(n+1)^3=o\left(\left(\frac{\mathrm{e}+\pi}{5}\right)^n\right)$. Comme $(\sin(n!)\operatorname{Arctan}(n))$ est bornée et que $\left(\frac{\mathrm{e}+\pi}{5}\right)^n\to+\infty$, on a $(\sin(n!)\operatorname{Arctan}(n))=o\left(\left(\frac{\mathrm{e}+\pi}{5}\right)^n\right)$. De fait, $u_n\sim-\left(\frac{\mathrm{e}+\pi}{5}\right)^n$, donc $u_n\to-\infty$.

19 - solution D'après la formule de Stirling, $u_n\sim\frac{\sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n n^n}\sim\sqrt{2}\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right)^n\to+\infty$ car $\frac{4}{\mathrm{e}}>1$.

20 - solution

➢ *Soit $x\in\mathbb{R}$. $u_n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$.*
Comme $\frac{x}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x}{n}$, puis, par produit, $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}x$. De fait, on peut dire que $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$. Par composition de limite, $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^x$.

➢ *Notons que l'écriture $u_n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ est licite à partir d'un certain rang (ce qui suffit à l'étude de la limite quand n tend vers $+\infty$) : en effet, comme $\frac{x}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il existe un rang à partir duquel $\frac{x}{n}>-1$ et donc $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ est bien défini à partir de ce rang.*
Par contre, hors de question d'utiliser cette écriture dans le cas complexe : en effet, on a toujours $1+\frac{x}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$, donc on peut affirmer que $\operatorname{Im}\left(1+\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, mais rien ne dit que $\operatorname{Im}\left(1+\frac{x}{n}\right)=0$ APCR.
Avec $x=i$, par exemple, $\operatorname{Im}\left(1+\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}$ ne s'annule jamais et, a fortiori, $1+\frac{x}{n}$ n'est jamais réel, et encore moins strictement positif !

➢ *Soit $x\in\mathbb{C}$.* On note $x=a+ib$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et on écrit $1+\frac{x}{n}=r_n\,\mathrm{e}^{i\theta_n}$ avec $r_n\in\mathbb{R}^{+*}$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$. Comme $1+\frac{x}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$, on peut affirmer que $r_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$ et $\theta_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
On a alors : $u_n=r_n^n\,\mathrm{e}^{in\theta_n}$. Or :

✧ $r_n=\sqrt{1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}}$, donc $r_n^n=\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=\exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)\right)$.
Comme $\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, $\ln\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2a}{n}$.
Donc $\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a$. Par composition de limites, $r_n^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^a$.

✧ $\tan(\theta_n) = \frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}} = \frac{b}{n+a} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{n}$. Et comme $\theta_n \to 0$, $\tan(\theta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \theta_n$, donc $\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{n}$. Puis $n\theta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$, donc $\mathrm{e}^{in\theta_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{ib}$.

Bilan : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^x$.

21 - solution Par croissances comparées, $[\ln(n)]^{7/2} = o\left(n^{1/2}\right)$. Comme $(\sin(n))$ est bornée et que $\sqrt{n} \to +\infty$, on a $\sin(n) = o(\sqrt{n})$. De fait, $b_n \sim \sqrt{n}$, puis $b_n \to +\infty$.

22 - solution $d_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)$. Or, $\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1 \to 2 \neq 0$, donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1 \sim 2$. Par produit, $d_n \sim 2\sqrt{n}$ et $d_n \to +\infty$.

23 - solution $e_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$. Or, comme $\frac{1}{n} \to 0$, $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{2n}$. Par produit, $e_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $e_n \to 0$.

24 - solution Comme $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{1}{n^3} \to 0$, on a $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ et $\mathrm{e}^{\frac{1}{n^3}}-1 \sim \frac{1}{n^3}$. De plus, $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ donc $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1$. Par produit et quotient, $b_n \sim \frac{n}{2}$ et $b_n \to +\infty$.

25 - solution

1. Cours.
2. Comme $\frac{1}{n} \to 0$, $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\tan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc $u_n \sim -\frac{1}{6n^3}$. Comme $-\frac{1}{6n^3}$ reste de signe négatif, il en est de même de u_n APCR.

26 - solution $a_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n}}$.
Or, $\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ et $\frac{\ln(n)}{n}$ sont deux termes équivalents, puisque $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \sim \frac{\ln(n+1)}{n} \sim \frac{1}{n}\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{\ln(n)}{n}$.
De plus, ils tendent tous les deux vers 0 par croissances comparées.
On peut donc utiliser le $\mathrm{DL}_2(0)$ de l'exponentielle $\mathrm{e}^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$:

$$a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln^2(n+1)}{2(n+1)^2} - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right).$$

Or, $\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \frac{\ln(n)}{n+1} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{\ln(n)}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.
Après simplifications, $a_n = -\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. Finalement, $n^2 a_n \sim -\ln(n) \to -\infty$.

27 - solution

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite itérative.
   - $[0\,,\pi]$ est stable par sin, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $[0\,,\pi]$. Or, $\forall x \in [0\,,\pi]$, $\sin(x) \leqslant x$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - Étant également minorée (par 0), (u_n) est convergente d'après le théorème des suites monotones.
   - Notons $\ell \in [0\,,\pi]$ sa limite. Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = \sin(u_n)$, on a $\ell = \sin(\ell)$. Or, $\forall x \in]0\,,\pi]$, $\sin(x) < x$. Donc $\ell = 0$.
2. $\mathrm{DL}_3(0)$: $\sin(x) \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Donc $\sin^m(x) \underset{x\to0}{=} x^m - m\frac{x^{m+2}}{6} + o(x^{m+2})$. Ainsi, $\frac{1}{\sin^m(x)} - \frac{1}{x^m} \underset{x\to0}{\sim} \frac{m}{6}x^{2-m}$.
   $m = 2$ est le seul convenable et on a alors $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{3}$.
3. Naturellement, si $u_0 = 0$, (u_n) est la suite nulle, et $u_n \sim 0$.
   Supposons $u_0 \neq 0$. Alors, par récurrence immédiate, (u_n) ne s'annule jamais. Et, comme $u_n \to 0$, on peut appliquer le résultat précédent : $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1)$. On en déduit, par sommation membre à membre et télecopage : $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{3} + o(n)$, soit $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{n}{3}$, ou encore $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$ puisque $\frac{1}{u_n^2} \to +\infty$. Enfin, on en conclut que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

28 - solution On sait que, au voisinage de 0 : $\sqrt{1+x} \underset{x\to0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$.
Ainsi, puisque $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\pi\sqrt{n^2+n+1} &= \pi n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \pi n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 + O\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \pi n\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

29 - solution 1. La fonction f_n a pour tableau de variations :

x	0	1	u_n	e	n	$n\ln n$	v_n	$2n\ln n$	$+\infty$
f_n	$+\infty$	>0	0	<0	<0	<0	0	>0	$+\infty$

Le théorème de la bijection s'applique sur $]0\,,n[$, où il permet de voir qu'il y a exactement un zéro u_n, puis sur $]n\,,+\infty[$, où on obtient le second zéro v_n.

2. (a) On observe que $f_n(1) = 1 > 0$ et $f_n(\mathrm{e}) = e - n < 0$ et le tableau de variations permet de voir que $1 < u_n < \mathrm{e}$.

   (b) On calcule $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) = \underbrace{u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1})}_{=0 \text{ par déf de } u_{n+1}} + \ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
   Selon 2.a, $u_{n+1} > 1$, donc $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$. Comme f_n est strictement décroissante sur $]0\,,n[$, $u_{n+1} < u_n$. Ainsi, u est décroissante.

   (c) u est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 1$. Par l'absurde, si l'on suppose $\ell \neq 1$, alors $-n\ln(u_n) \to -\infty$ donc $0 = u_n - n\ln(u_n) \to -\infty$: absurde. Ainsi, $\ell = 1$.

   (d) Comme $u_n \to 1$, on a $u_n - 1 \to 0$ et :
$$1 \sim u_n = n\ln(u_n) = n\ln(1 + (u_n - 1)) \sim n(u_n - 1)$$
   d'où $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.

3. (a) Comme $v_n > n$, par théorème d'inégalité, $v_n \to +\infty$.

   (b) On observe que $f_n(n\ln n) < 0$ et $f_n(2n\ln(n)) > 0$.
   Le tableau de variations permet de voir que $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.

   (c) On a toujours $v_n = n\ln(v_n)$.
   L'encadrement obtenu en 3.b permet d'obtenir $\ln(n) + \ln(\ln n) < \ln(v_n) < \ln(n) + \ln(2) + \ln(\ln n)$ puis $n\ln(n) + n\ln(\ln(n)) < v_n = n\ln(v_n) < n\ln(n) + n\ln(2) + n\ln(\ln n)$.
   Or, $n\ln(n) + n\ln(\ln(n)) \sim n\ln(n)$ et $n\ln(n) + n\ln(2) + n\ln(\ln n) \sim n\ln(n)$, donc par théorème des gendarmes : $v_n \sim n\ln n$.

30 - solution $\frac{x}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\cos\frac{x}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc APCR, $\cos\frac{x}{\sqrt{n}} > 0$ et on peut écrire $u_n = \exp\left(n\ln\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$.
$\frac{x}{\sqrt{n}} \to 0$ donc $\cos\frac{x}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{x^2}{2n} + \frac{x^4}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puis $n\ln\cos\frac{x}{\sqrt{n}} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, et :
$$u_n = \mathrm{e}^{-x^2/2}\exp\left(-\frac{x^4}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}^{-x^2/2}\left(1 - \frac{x^4}{12n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Ainsi : $u_n \to \mathrm{e}^{-x^2/2}$ et $u_n - \mathrm{e}^{-x^2/2} \sim -\mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{x^4}{12n}$.

31 - solution 1. Cela découle directement du théorème de la bijection appliqué à P_n sur $]0\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
P_n	1	$2-n$	$+\infty$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$: $P_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n - 1) < 0 = P_{n+1}(x_{n+1})$. Par décroissance de P_n sur $]0\,,1[$, $x_n > x_{n+1}$, donc $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante.
   De plus, $0 \leqslant x_n^n < x_3^n \to 0$ (car $0 \leqslant x_3 < 1$) donc $x_n^n \to 0$. Ainsi, en passant à la limite dans la relation $P_n(x_n) = 0$, il vient $1 - nx_n \to 0$, soit $x_n \sim \frac{1}{n}$.

   (b) On observe : $\frac{x_n - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{n+1}}} = n^n(nx_n - 1) = n^n x_n^n = (nx_n)^n = \mathrm{e}^{n\ln(nx_n)} = \mathrm{e}^{n\ln(1+x_n^n)}$. Or, $\ln(1+x_n^n) \sim x_n^n$ puisque $x_n^n \to 0$ selon précédemment. Donc $n\ln(1+x_n^n) \sim nx_n^n \to 0$, puisque $0 \leqslant nx_n^n \leqslant nx_3^n \to$. Finalement, $\mathrm{e}^{n\ln(1+x_n^n)} \to 1$, donc $x_n - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^{n+1}}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$: $P_{n+1}(y_n) = y_n^n(y_n - 1) > 0 = P_{n+1}(y_{n+1})$. Par croissance de P_n sur $]1\,,+\infty[$, $y_n > y_{n+1}$, donc $(y_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante.
   Étant minorée par 1, (y_n) converge. Notons $\ell \geqslant 1$ sa limite.
   Par l'absurde, supposons $\ell > 1$. Alors $y_n > \ell$, donc $y_n = \frac{1+y_n^n}{n} > \frac{1+\ell^n}{n} > \frac{\ell^n}{n} \to +\infty$, absurde. Donc $y_n \to 1$.

(b) On a $y_n^n = ny_n - 1 \sim n$.
On compose par ln (puisque $n \to +\infty$, cf. plus bas) : $n\ln(y_n) \sim \ln(n)$. Puis $\ln(y_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$. On peut donc écrire $\ln(y_n) = \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
Comme $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$, $y_n = \mathrm{e}^{\ln(y_n)} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$, puis $y_n - 1 = \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$, soit $y_n - 1 \sim \frac{\ln(n)}{n}$.
Justifions que, si $a_n \sim b_n$ et $b_n \to +\infty$, alors $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$. Supposons donc $a_n \sim b_n$ et $b_n \to +\infty$. Notons que (a_n) et (b_n) sont nécessairement à valeurs strictement positives et on peut écrire :

$$\frac{\ln(a_n)}{\ln(b_n)} = \frac{\ln\left(\frac{a_n b_n}{b_n}\right)}{\ln(b_n)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}{\ln(b_n)} \to 1.$$

32 - solution $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x\,\mathrm{e}^x)$, donc $\sqrt{x\,\mathrm{e}^x - x^2} \sim \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$. $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$, donc $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \sim \mathrm{e}^x$.
Par quotient, $\frac{\sqrt{x\,\mathrm{e}^x - x^2}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \sim \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}-x} = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

33 - solution Posons $u = x - 1 \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$. Alors $\frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{\ln(1+u)}{u(u+2)} \underset{u\to0}{\sim} \frac{u}{2u} \to \frac{1}{2}$.

34 - solution Pour $x \in]-1,1[$, on pose $y = \mathrm{Arccos}(x)$: $y \in]0,\pi[$ et $y \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$. Et $1 - x = 1 - \cos(y) \underset{x\to1}{\sim} \frac{y^2}{2}$.
Ainsi, $\frac{1-x}{\mathrm{Arccos}(x)} = \frac{1-\cos(y)}{y} \underset{x\to1}{\sim} \frac{y}{2} \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$.

35 - solution $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a)}+\mathrm{e}^{b\ln(x)}}{2}\right)\right)$.
$\mathrm{DL}_1(0)$: $\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a)}+\mathrm{e}^{b\ln(x)}}{2} = 1 + x\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} + o(x)$. Donc $\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a)}+\mathrm{e}^{b\ln(x)}}{2}\right) \sim x\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$.
On en déduit que $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a)}+\mathrm{e}^{b\ln(x)}}{2}\right) \sim \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$, ou encore $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a)}+\mathrm{e}^{b\ln(x)}}{2}\right) \to \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} = \ln(\sqrt{ab})$.
Par composition, la limite est $\sqrt{ab}$.

36 - solution Posons $h = x - \mathrm{e}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(\ln(\mathrm{e}+h))}{h^2 - \mathrm{e}\,h} \\ &= \frac{\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{h}{\mathrm{e}}\right)\right)}{h(h-\mathrm{e})} \\ &= \frac{\ln\left(1+\frac{h}{\mathrm{e}}+o(h)\right)}{h(h-\mathrm{e})} \\ &= \frac{\frac{h}{\mathrm{e}}+o(h)}{h(h-\mathrm{e})} \\ &= \frac{\frac{1}{\mathrm{e}}+o(1)}{h-\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Il suffit à présent de calculer la limite quand $h \to 0$: $-\mathrm{e}^{-2}$.

37 - solution $\mathrm{DL}_2(0)$: $\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x^4}} - \sin(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. Donc $\ln(x)\ln\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x^4}} - \sin(x)\right) \sim \frac{1}{2}x^2\ln(x) \to 0$ (CC). Réponse : 1.

38 - solution Posons $h = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\,\mathrm{e}^{1/x} - \sqrt[3]{x^6+3x^5+x^4} \\ &= \frac{1}{h^2}\left[\mathrm{e}^h - \left(1+3h+h^2\right)^{1/3}\right] \\ &= \frac{1}{h^2}\left[\left(1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right) - \left(1+\frac{1}{3}(3h+h^2) - \frac{2}{18}(3h+h^2)^2 + o(h^2)\right)\right] \\ &= \frac{1}{h^2}\left[1+h+\frac{h^2}{2} - 1 - h + \frac{2}{3}h^2 + o(h^2)\right] \\ &= \frac{7}{6} + o(1). \end{aligned}$$

Bref, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{6}$.

39 - solution $\ln(1+\sqrt{x}) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{x}$, $\sin x \underset{0^+}{\sim} x$, donc $\sqrt{\sin x} \underset{0^+}{\sim} \sqrt{x}$ et $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{\sin x}} \underset{0^+}{\sim} 1$.

40 - solution Posons $u = \frac{\pi}{2} - x \underset{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}{\longrightarrow} 0^+$. On a alors $x = \frac{\pi}{2} - u$, et on peut écrire :

$$\tan x = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-u)}{\cos(\frac{\pi}{2}-u)} = \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1}{\tan u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}.$$

41 - solution $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})$, donc on a $\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = \ln(1+u)$ avec $u = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \sim \frac{1}{x\ln x}$.

42 - solution On a $x^x - \sin^x(x) = x^x\left(1 - \mathrm{e}^{x\ln\frac{\sin(x)}{x}}\right) \sim 1 - \mathrm{e}^{x\ln\frac{\sin(x)}{x}}$ car $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
Puis $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$ donc $x\ln\frac{\sin(x)}{x} = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\mathrm{e}^{x\ln\frac{\sin x}{x}} = 1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Ainsi $x^x - \sin^x(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$.

43 - solution
- En 0 : $(x+1)\ln(x) \sim \ln(x) \to -\infty$, $x\ln(x+1) \sim x^2 \to 0$, donc $x\ln(x+1) = o((x+1)\ln(x))$, donc $f(x) \sim (x+1)\ln(x) \sim \ln(x)$.
- En $+\infty$: $f(x) = \ln(x) + x\ln\frac{x}{x+1} = \ln(x) - x\ln(1+\frac{1}{x})$, or $x\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} 1 = o(\ln x)$, donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.
- En 1 : $f(x) \to -\ln(2) \neq 0$ donc $f(x) \sim -\ln(2)$.

44 - solution
1. $\sqrt{f(x)} = f(x)^{1/2} \underset{x\to a}{\sim} g(x)^{1/2} = \sqrt{g(x)}$.
2. (a) On écrit $\frac{\mathrm{e}^{f(x)}}{\mathrm{e}^{g(x)}} = \mathrm{e}^{f(x)-g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ car $f(x)-g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1-1=0$. D'où $\mathrm{e}^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \mathrm{e}^{g(x)}$.
   (b) Non, contre-exemple : $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, $g = 1 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, $a = b = +\infty$.
3. (a) Comme $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ donc il existe un voisinage V de a sur lequel f et g sont strictement plus grande que 1. Si $x \in V$, on écrit alors $\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln\left(\frac{f(x)g(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(g(x)) + \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))}$. Or :
   - $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ donc $\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$;
   - $\ln(g(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

   Ainsi, $\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$, donc $\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$.
   (b) On reprend la même argumentation : on choisit V sur lequel f et g sont dans $]0\,,1[$ et, comme on a $\ln(g(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, le résultat final tient encore.
   (c) Non, contre exemple : $a = +\infty$, $b = 1$, $f = 1 + \frac{1}{\cdot}$, $g = 1 + \frac{2}{\cdot}$.

45 - solution f est définie sur $]-1\,,+\infty[\setminus\{0\}$. $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit : prolongement par continuité en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$, ce prolongement est dérivable en posant $f'(0) = \frac{1}{3}$. Équation de la tangente : $y = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$, et la courbe est au-dessous.

46 - solution f est définie sur $]-1\,,+\infty[\setminus\{0\}$. $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^3}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. On en déduit : prolongement par continuité en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$, ce prolongement est dérivable en posant $f'(0) = \frac{1}{3}$. Équation de la tangente : $y = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$, et la courbe est au-dessous pour les points d'abscisses négatives et au-dessus pour les points d'abscisses positives.

47 - solution
1. $\mathbb{R}$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonction dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+1-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}} < 0$, car $2x+1 < \sqrt{x^2+x+1}$ est toujours vraie (disjonction de cas $x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $x > -\frac{1}{2}$).
3. - Au voisinage de $+\infty$: $f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \frac{1}{2}$.

➢ Au voisinage de $+\infty$: $f(x) = -x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right) = -2x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc asymptote oblique en $-\infty$ d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$.

48 - solution Au voisinage de $+\infty$, $x^3+5x^2-x+1>0$ (puisque $x^3+5x^2-x+1 \to +\infty$), donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3+5x^2-x+1)^{1/3} \\ &= x\left(1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3} \\ &= x\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= x\left(1+\frac{5}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= x+\frac{5}{3}+o(1). \end{aligned}$$

Bref, en $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = x + \frac{5}{3}$.
Au voisinage de $-\infty$, $x^3+5x^2-x+1<0$ donc $f(x) = -(-(x^3+5x^2-x+1))^{1/3}$. Les calculs se font de manière similaire et on obtient la même asymptote...