Bornes supérieure et inférieure

1 ★☆☆ ♥

L'ensemble suivant est-il majoré? minoré? admet-il une borne supérieure? une borne inférieure? un plus grand élément? un plus petit élément? $E = \left\{ \frac{x^3}{|x^3 - 1|}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}$.

2 ★☆☆ ⊕

L'ensemble suivant est-il majoré? minoré? admet-il une borne supérieure? une borne inférieure? un plus grand élément? un plus petit élément? $E = \left\{ \frac{2xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right\}$.

3 ★★☆☆ ♥

Soient E et F deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit $E + F = \{e + f, (e, f) \in E \times F\}$.

1. On suppose E et F majorées. Montrer que $E + F$ est majoré et que $\sup(E + F) = \sup(E) + \sup(F)$.
2. Trouver une propriété analogue dans le cas où E et F sont minorées.

4 ★★☆☆ ⊕

Soient E et F deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in E \times F, x \leq y$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists (x, y) \in E \times F, y - x < \varepsilon$. Montrer que E est majorée, F est minorée et que $\sup(E) = \inf(F)$.

Densité

5 ☆☆☆

Montrer que $\{q^2, q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$.

6 ★★☆☆ ⊕ ♥

On cherche à déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Soit f une solution du problème. On pose $a = f(1)$.
  - (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an$.
  - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = an$.
  - (c) Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar$.
  - (d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier qu'il existe deux suites de rationnels (r_n) et (r'_n) convergentes vers x telles que $\forall n \in \mathbb{N}, r_n \leq x \leq r'_n$ et en déduire que $f(x) = ax$.
2. Conclure quant au problème posé.

Indications

2 - indication Montrer classiquement que tout élément de E est compris entre -1 et 1 .

3 - indication Montrer que $\sup(E) + \sup(F)$ est un majorant, puis que c'est le plus petit des majorants.

4 - indication Pour l'égalité, commencer par montrer $\sup(E) \leq \inf(F)$; montrer ensuite l'autre inégalité en raisonnant par l'absurde.

6 - indication 1.a et 1.b. Repenser à la démonstration de la formule de Moivre. 1.c. Écrire $r = \frac{n}{m}$ et calculer $f(mr)$. 1.d. Argument de densité. 2. Analyse-synthèse.

Solutions

1 - solution Notons $f : x \mapsto \frac{x^3}{|x^3-1|}$. Étude de la fonction.

➤ Sur $]1, +\infty[$, $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^3-1}$ est dérivable par opérations algébriques et $\forall x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{3x^2}{(x^3-1)^2} < 0$ donc f est décroissante. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Par le TVI, $f(]1, +\infty[) =]1, +\infty[$.

➤ Sur $] -\infty, 1[$, on procède de même : $f' > 0$ donc f est strictement croissante. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$.

Par le TVI, $f(]-\infty, 1[) =]-1, +\infty[$.

Ainsi, $E = f(]1, +\infty[) \cup f(]-\infty, 1[) =]-1, +\infty[$ est minorée mais pas majorée, admet une borne inférieure -1 mais pas de minimum, et n'admet ni borne supérieure ni maximum.

2 - solution On sait que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

➤ $(x - y)^2 \geq 0$ donc $x^2 + y^2 \geq 2xy$ donc $\frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 1$. Et cette valeur est atteinte en $(1, 1)$ par exemple. Donc E est majorée et $\sup(E) = \max(E) = 1$.

➤ $(x + y)^2 \geq 0$ donc $x^2 + y^2 \geq -2xy$ donc $\frac{2xy}{x^2 + y^2} \geq -1$. Et cette valeur est atteinte en $(1, -1)$ par exemple. Donc E est minorée et $\inf(E) = \min(E) = -1$.

3 - solution 1. Avant tout, on observe que E et F sont non vides et majorées, donc les nombres $S_E = \sup(E)$ et $S_F = \sup(F)$ sont bien définis.

➤ Commençons déjà par prouver que $E + F$ est majoré.

Soient $x \in E + F$. Il existe $(e, f) \in E \times F$ tel que $x = e + f$. Or, $e \leq S_E$ et $f \leq S_F$, donc $x \leq S_E + S_F$. Ainsi, $E + F$ est majoré et on peut même affirmer que $\sup(E + F) \leq S_E + S_F$ (puisque $\sup(E + F)$ est le plus petit des majorants de $E + F$).

➤ Montrons maintenant que $S_E + S_F \leq \sup(E + F)$.

✧ *Stratégie 1.* Considérons un réel M tel que $M < S_E + S_F$, et montrons que M n'est pas un majorant de $E + F$.

Fixons alors $\varepsilon > 0$ et écrivons $M = S_E + S_F - \varepsilon$.

◆ D'après la définition de S_E , il existe $e \in E$ tel que $e > S_E - \frac{\varepsilon}{2}$.

◆ D'après la définition de S_F , il existe $f \in F$ tel que $f > S_F - \frac{\varepsilon}{2}$.

De fait, $e + f \in E + F$ et, par sommation terme à terme : $e + f > S_E + S_F - \varepsilon = M$. Autrement dit, M n'est pas un majorant de $E + F$ ce qui implique que $\sup(E + F) \geq S_E + S_F$.

✧ *Stratégie 2.* Fixons $f \in F$. On a : $\forall e \in E$, $e + f \leq \sup(E + F)$, donc $e \leq \sup(E + F) - f$. La quantité $\sup(E + F) - f$ est donc un majorant de E , ce qui entraîne $S_E \leq \sup(E + F) - f$.

On peut ainsi affirmer : $\forall f \in F$, $f \leq \sup(E + F) - S_E$. La quantité $\sup(E + F) - S_E$ est donc un majorant de F , ce qui entraîne que $S_F \leq \sup(E + F) - S_E$.

Autrement dit, $S_E + S_F \leq \sup(E + F)$.

Dans les deux cas, on peut affirmer que $\sup(E + F) = S_E + S_F$.

2. Si E et F sont minorées, alors $E + F$ aussi et $\inf(E + F) = \inf(E) + \inf(F)$.

4 - solution ➤ F n'est pas vide, donc elle contient un élément, disons f . Par hypothèse, f majore E donc E est majorée.

➤ Le même argument permet de voir que F est minorée.

➤ Fixons $y \in F$: y majore E donc $\sup(E) \leq y$ (c'est le plus petit des majorants). Ainsi, $\sup(E)$ minore F donc $\sup(E) \leq \inf(F)$.

➤ Par l'absurde, supposons $\sup(E) < \inf(F)$. Notons $\varepsilon = \inf(F) - \sup(E) > 0$.

Par hypothèse, il existe $(x, y) \in E \times F$ tel que $y - x < \varepsilon$.

Or, $x < \sup(E)$ donc $-x > -\sup(E)$; et $y > \inf(F)$. On en déduit $y - x > \inf(F) - \sup(E) = \varepsilon$, ce qui est absurde. En conclusion, $\sup(E) = \inf(F)$.

5 - solution Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x < y$. On a donc $\sqrt{x} < \sqrt{y}$. Par densité de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, il existe $q \in \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{x} < q < \sqrt{y}$. D'où $x < q^2 < y$. Cela prouve la densité de $\{q^2, q \in \mathbb{Q}\}$ dans $\mathbb{R}^+$.

6 - solution 1. (a) Récurrence.

➤ *Initialisation.* En appliquant la relation pour $(x, y) = (0, 0)$, on a $f(0) = 0$.

➤ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(n) = an$. Alors, en appliquant la relation pour $(x, y) = (n, 1)$, on a $f(n+1) = f(n) + f(1) = an + a = a(n+1)$.

D'où le résultat.

- (b) Il reste à prouver le résultat sur $\mathbb{Z}^{-*}$. Soit $n \in \mathbb{Z}^{-*}$. On a $-n \in \mathbb{N}$ donc $f(-n) = -an$ d'après 1.a. Et, en appliquant la relation pour $(x, y) = (n, -n)$, on a $0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$ donc $f(n) = an$.
- (c) Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{n}{m}$. D'après la question 1.b, $f(mr) = f(n) = an$. Or, par récurrence immédiate sur $p \in \mathbb{N}$ (comme dans 1.a), on montrerait que $f(pr) = pf(r)$. C'est en particulier pour $p = m$, donc $mf(r) = an$, soit $f(r) = a\frac{n}{m} = ar$.
- (d) Existence des deux suites : argument de densité.

M1 Par exemple, en posant respectivement r_n et r'_n les approximations décimales par défaut et par excès de x à 10^{-n} : on a bien $r_n \leq x \leq r'_n$ et (r_n) et (r'_n) convergent bien vers x .

M2 On peut aussi définir r_n et r'_n deux rationnels respectivement dans $\left]x - \frac{1}{n+1}, x\right]$ et $\left]x, x + \frac{1}{n+1}\right[$, qui existent car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On a alors $r_n \leq x \leq r'_n$. Donc, par croissance de f , $ar_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(r'_n) = ar'_n$. Par passage à la limite dans des inégalités larges, $ax \leq f(x) \leq ax$, soit $f(x) = ax$.

2. Raisonnement par analyse-synthèse. L'objet de la question 1 est justement l'analyse.

Synthèse. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$. f est croissante **ssi** $a \geq 0$. Et la relation est immédiatement vérifiée.

Conclusion : les fonctions solutions sont les fonctions $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}^+$.