

Suites récurrentes linéaires d'ordre 1

1 ☆☆☆

Exprimer u_n en fonction de n lorsque (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}$$

3 ☆☆☆

Exprimer u_n en fonction de n lorsque (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2\sqrt{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + u_n\sqrt{2} \end{cases}$$

2 ☆☆☆

Exprimer u_n en fonction de n lorsque (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_{n+1} = u_n\sqrt{2} \end{cases}$$

4 ★☆☆

⊕ ↗

Existe-t-il une valeur réelle de u_0 tel que la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n$ définisse une suite arithmético-géométrique ?

5 ★☆☆ ⊕

Expliciter la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n + 1$.

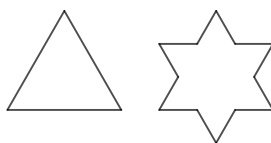
6 ★☆☆ ♥

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 > 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = au_n^2$.

- Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
- On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln(u_n)$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.
- En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

7 ★★☆☆

On considère un triangle équilatéral P_1 de côté 1. Chaque côté est ensuite divisé en trois parties égales et on construit à partir du segment situé au milieu de chaque côté un nouveau triangle équilatéral à l'extérieur de P_1 ; on obtient ainsi un polygone P_2 . En procédant de la même façon à partir de P_2 , on fabrique un polygone P_3 , puis en itérant le processus, on construit une suite de polygones $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Ci-dessous, les polygones P_1 et P_2 .



On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- c_n le nombre de côtés de P_n ;
- ℓ_n la longueur d'un côté de P_n ;
- p_n le périmètre de P_n ;
- A_n l'aire de P_n .

- Montrer que la suite (c_n) est une suite géométrique puis en donner une écriture explicite.
- Exprimer (ℓ_n) en fonction de n . En déduire que (p_n) tend vers $+\infty$.
- Démontrer que $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
- Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, A_{n+1} = A_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
- En déduire une écriture explicite de (A_n) ainsi que sa limite.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

8 ☆☆☆

Exprimer u_n en fonction de n lorsque $u_0 = -1$, $u_1 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

9 ☆☆☆

Exprimer u_n en fonction de n lorsque $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$.

10 ☆☆☆

Exprimer u_n en fonction de n lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4u_{n+2} = 2\sqrt{3}u_{n+1} - u_n$, et $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{i}{4}$; puis $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{1}{2}$.

11 ☆☆☆ ⊕

Déterminer l'expression de la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n + 1$.

12 ★☆☆ ♥ ⊕

Expliciter u_n en fonction de n lorsque u_0 et u_1 sont fixés dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$.
Exprimer sa limite en fonction de u_0 et u_1 lorsqu'elle existe.

13 ★★☆☆ ↗ ♥

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$.

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1} - x_n$. Calculer y_0 et y_1 et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 2^n$.
2. On désigne par (t_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = \alpha 2^n$.
Déterminer la constante réelle α telle que (t_n) vérifie la relation de récurrence satisfaite par y .
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = y_n - t_n$. Vérifier que (r_n) est une suite récurrente linéaire double, et en déduire l'expression de r_n , puis y_n , en fonction de n .
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k$ et en déduire l'expression de x_n en fonction de n .

Indications

4 - indication Premier piège : n ne peut pas être la raison additive... Deuxième piège : ce n'est pas parce que $(a, b) = (2, n)$ ne convient pas qu'il n'y en a pas d'autres qui conviennent...

Raisonner par analyse synthèse et observer les valeurs de u_1 , u_2 et u_3 .

5 - indication Trouver une suite v vérifiant la relation de récurrence sous la forme $v : n \mapsto an + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

11 - indication La suite constante égale à 1 satisfait à la relation de récurrence.

Solutions

1 - solution Suite arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 + 2n$.

2 - solution Suite géométrique : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, u_n = \sqrt{2}^{n-2}$.

3 - solution Suite arithmético-géométrique. On introduit la suite constante c satisfaisant à la relation de récurrence : $c = 2 + c\sqrt{2}$, soit $c = \frac{2}{1-\sqrt{2}}$. On obtient facilement (différence terme à terme des relations de récurrence) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - c = \sqrt{2}(u_n - c)$. $u - c$ est donc géométrique, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - c = \sqrt{2}^n(u_0 - c)$. Après simplifications, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2}^{n+2} - 2(\sqrt{2} + 1)$.

4 - solution Remarques :

- ne pas tomber dans le panneau en donnant la très mauvaise argumentation : « elle est tout le temps arithmético-géométrique, sa raison multiplicative est 2, sa raison additive est n », puis que n dépend de n !
- ne pas céder pour autant à la tentation de la (moins) mauvaise (quoique...) argumentation « elle n'est pas arithmético-géométrique car n n'est pas indépendant de n ».

Raisonnement par analyse-synthèse.

- *Analyse.* Supposons u arithmético-géométrique : soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$. Observons les deux expressions de u_n pour $n \leq 3$:

u_0	$2u_0$	$4u_0 + 1$	$8u_0 + 4$
u_0	$au_0 + b$	$a^2u_0 + (a+1)b$	$a^3u_0 + (a^2 + a + 1)b$

Tout d'abord, $a \neq 2$: sinon, $b = 0$ et la valeur de u_2 est incohérente. Puis $u_0 = \frac{b}{2-a}$. En injectant dans la troisième colonne, il vient $2b + 2 - a = ab$, soit $b(a-2) = 2-a$; comme $a \neq 2$, il vient $b = -1$. En injectant dans la dernière relation, on a $a^2 - 3a + 2 = 0$: équation du second degré de solutions 1 et 2. Cette dernière étant exclue, $a = 1$. Finalement, $u_0 = -1$ est la seule valeur possible.

- *Synthèse.* On observe sans peine que si $u_0 = -1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -n - 1$ donc (u_n) est arithmético-géométrique (et même arithmétique).

5 - solution ➤ Commençons par trouver une suite $v : n \mapsto an + b$ vérifiant la relation de récurrence : en injectant, on trouve $a = -1$ et $b = -2$.

- La suite $u - v$ est alors géométrique de raison 2 donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = 2^n(u_0 - v_0)$, soit $u_n = 2^n - n - 2$.

6 - solution 1. Comme $u_1 > 0$ et $a > 0$, une récurrence immédiate permet d'observer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

2. On observe que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(a) + 2\ln(u_n) = 2v_n + \ln(a)$. Ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.

3. On déduit de la question précédente l'expression de v_n en fonction de n .

On note ℓ le réel vérifiant $\ell = 2\ell + \ln(a)$: il s'agit de $\ell = -\ln(a)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit $w_n = v_n - \ell$. En soustrayant membre à membre les relations :

$$\begin{cases} v_{n+1} &= 2v_n + \ln(a) \\ \ell &= 2\ell + \ln(a) \end{cases}$$

on obtient $w_{n+1} = 2w_n$. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est donc géométrique de raison 2 et on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = 2^{n-1}w_1 = 2^{n-1}(v_1 + \ln(a)) = 2^{n-1}\ln(au_1)$.

Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 2^{n-1}\ln(au_1) - \ln(a)$, puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{2^{n-1}\ln(au_1) - \ln(a)}$, soit, après simplifications,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(au_1)^{2^{n-1}}}{a}.$$

7 - solution 1. Pour passer de P_n à P_{n+1} , on remplace un côté par 4 côtés. On a donc $c_{n+1} = 4c_n$. Or, $c_1 = 3$, donc $c_n = 3 \times 4^{n-1}$.

2. Par construction, on a $\ell_{n+1} = \frac{1}{3}\ell_n$. Or, $\ell_1 = 1$, donc $\ell_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

Puis, $p_n = c_n \ell_n = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

3. D'après le théorème de Pythagore, la hauteur de A_1 satisfait à $1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h_1^2$. Donc $h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'où $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

4. On construit P_{n+1} en ajoutant sur chaque côté de P_n un triangle équilatéral de côté ℓ_{n+1} . Or, en utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente, ce triangle a pour aire $a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \ell_{n+1}\right) \times \ell_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4 \times 9^n}$. Ainsi, $A_{n+1} = A_n + c_n a_{n+1} = A_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
5. Télescopage : $A_n - A_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (A_{k+1} - A_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

8 - solution Cette suite est récurrente linéaire double. Son polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. Ainsi il existe λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)2^n$. Les conditions initiales permettent d'obtenir $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2n - 1)2^n$.

9 - solution Il s'agit d'une suite récurrente linéaire double. Son polynôme caractéristique est $(X - 1)(X - 2)$ donc il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu \cdot 2^n$. Avec les conditions initiales, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 3$.

10 - solution Cette suite récurrente linéaire double a pour polynôme caractéristique $X^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{4}$. Ses racines complexes conjuguées sont $\frac{\sqrt{3}}{4} \pm i\frac{1}{4} = \frac{1}{2}e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$.

➤ Pour le premier cas, on cherche naturellement une suite complexe : il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(\frac{3+i}{4}\right)^n + \mu \left(\frac{3-i}{4}\right)^n.$$

Avec les conditions initiales, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(1 + \frac{3}{2}i\right) \left(\frac{3+i}{4}\right)^n - \frac{3}{2}i \left(\frac{3-i}{4}\right)^n$.

➤ Pour le second cas, comme $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$, il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}$. Ainsi, on prend l'expression des suites réelles vérifiant la relation de récurrence : il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^n} \left(\lambda \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$. Avec les conditions initiales, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + (1 - \sqrt{3}) \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$.

11 - solution La suite constante égale à 1 satisfait à la relation de récurrence. De fait, la suite $v = u - 1$ vérifie $v_0 = 1, v_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n$ (ce que l'on obtient par différence terme à terme des relations de récurrence vérifiées par u et la suite 1). Par conséquent, v est alors une SRL2. Son polynôme caractéristique est $P = X^2 - 2X + 2$, ses racines sont $1 \pm i$, elles s'écrivent sous forme trigonométriques $\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$. De fait, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^{n/2} \left(\lambda_1 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \lambda_2 \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Avec les conditions initiales, il vient $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 2^{n/2} \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

12 - solution Récurrence double immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. On peut donc poser $v_n = \ln(u_n)$. Il vient $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$ puis $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^\lambda e^{\mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$. Comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $u_n \rightarrow e^\lambda$.

Par ailleurs, en résolvant le système formé des conditions initiales on obtient facilement $\lambda = \frac{1}{3}v_0 + \frac{2}{3}v_1$.

En conclusion, $u_n \rightarrow \sqrt[3]{u_0 u_1^2}$.

13 - solution 1. On calcule $y_0 = x_1 - x_0 = 2$ et $y_1 = x_2 - x_1 = -3$, puis, pour $n \in \mathbb{N}, y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 2^n$.

2. (t_n) vérifie la relation **ssi** $\alpha = -\frac{1}{4}$.

3. En soustrayant membre à membre les deux relations : $r_{n+2} - r_{n+1} - 6r_n = 0$. La suite (r_n) est donc récurrente linéaire double. Son polynôme caractéristique $X^2 - X - 6$ admet pour discriminant 25 et pour racines -2 et 3 . On en déduit qu'il existe deux constantes λ et μ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \lambda(-2)^n + \mu 3^n$. On sait que $r_0 = y_0 - t_0 = \frac{9}{4}$ et $r_1 = y_1 - t_1 = -\frac{5}{2}$ ce qui permet de calculer λ et μ . Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \frac{37}{20}(-2)^n + \frac{2}{5}3^n$. En reprenant la définition de (r_n) , on a $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{37}{20}(-2)^n + \frac{2}{5}3^n - \frac{1}{4}2^n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = x_n.$$

À l'aide de cette écriture et de la question précédente, il vient : $x_n = \frac{37}{60}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n - \frac{1}{4}2^n + \frac{2}{3}$.