

Vocabulaire

1 ☆☆☆ ♥

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

2 ☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}$ est n -périodique.

3 ★☆☆ ⊕ ♥

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

4 ★★★

Pour $x \in]0, 1]$, on pose $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f ce prolongement.
2. Déterminer les points fixes de f .
3. Montrer que $f \circ f = f$.

5 ☆☆☆

L'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes est-il stable par :

- somme ?
- combinaison linéaire ?
- produit ?

Reprendre ces questions pour les fonctions monotones.

Allures rapides de courbes

6 ☆☆☆

Donner rapidement l'allure de la courbe représentative de $f : x \mapsto \sqrt{2x - 3}$.

7 ☆☆☆

Donner rapidement l'allure de la courbe représentative de $f : x \mapsto 1 - \operatorname{ch}(2x + 1)$.

8 ☆☆☆ ♥

Donner rapidement l'allure de la courbe représentative de $f : x \mapsto 1 + \frac{\operatorname{th}(2x - 4)}{2}$.

9 ☆☆☆

Donner rapidement l'allure de la courbe représentative de $f : x \mapsto \frac{3}{4x + 5}$.

10 ☆☆☆

Donner rapidement l'allure de la courbe représentative de $f : x \mapsto \ln(3 - x) - \ln(3)$.

11 ☆☆☆ ♥

Donner rapidement l'allure de la courbe représentative de $f : x \mapsto \sqrt{2 - x}$.

Déterminer également ses points fixes et montrer que $[0, 2]$ et $[-2, 2]$ sont stables par f .

Dérivabilité globale des fonctions réelles

12 ☆☆☆

Expliciter la dérivée de $f : x \mapsto \frac{3x - 4}{(2x + 1)^2}$.

13 ☆☆☆

Expliciter la dérivée de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{(x^2 + 3x)^2}$.

14 ☆☆☆

Expliciter la dérivée de $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$.

15 ☆☆☆

Expliciter la dérivée de $f : x \mapsto (x^2 + 3)e^{x^3+2}$.

16 ☆☆☆

Expliciter la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 5x + 7}$.

17 ☆☆☆

Expliciter la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{x}}$.

18 ☆☆☆ ♥

Expliciter la dérivée de $f : x \mapsto (2x^3 + 3x^2)^4$.

19 ☆☆☆ ♥

Expliciter la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{(x^2 + 3)e^{x+5}}$.

20 ☆☆☆

Expliciter la dérivée de $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

21 ☆☆☆

Expliciter la dérivée de $f : x \mapsto \ln(\ln(x) + x^2 e^x)$.

29 ★☆☆ ♥

Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et expression de la dérivée de $f : x \mapsto \ln|\operatorname{th}(x)|$.

30 ★☆☆ ♥

Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que la fonction $x \mapsto (e^{x^2} + \cos(x))^t$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée.

31 ★★☆☆ ↗

Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et expression de la dérivée de $f : x \mapsto \frac{\pi^{\ln(3-x^2)}}{(\ln(3-x^2))^\pi}$.

32 ★☆☆

On pose $f : x \mapsto \ln\left(3x + \frac{2}{x}\right)$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f .
2. Étudier la dérivabilité et les variations de f .
3. Représenter graphiquement f .

33 ★★☆☆ ♥

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x e^x + 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f .
2. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer que l'équation $e^x = x + 2$ admet deux solutions : $a > 0$ et $b < 0$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f et donner une représentation graphique de f .

34 ☆☆☆ ♥

Calculer la dérivée n -ème de $x \mapsto x e^x$.

35 ★☆☆

Calculer la dérivée n -ème de $x \mapsto x^2 e^x$.

36 ☆☆☆ ♥

Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et expliciter sa dérivée n -ème pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Complément avec une étude ponctuelle simple

37 ★☆☆ ♥

Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et expression de la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$.

38 ★☆☆

Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et expression de la dérivée de $f : x \mapsto (5 - \sqrt{x})^3$.

39 ★☆☆

Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et expression de la dérivée de $f : x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 3}$.

40 ★☆☆

Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et expression de la dérivée de $f : x \mapsto e^{\sqrt{3x+1}}$.

41 ★☆☆ ♥

Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et expression de la dérivée de $f : x \mapsto 2x(\cos(\sqrt{x}))^2$.

Convexité

42 ☆☆☆ ♥

Convexité de $x \mapsto x^x$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)e^x$ admet un unique point d'inflexion.

43 ☆☆☆

Calcul de dérivées partielles

44 ☆☆☆ ♥

Calculer les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto \operatorname{ch}(x + y)$.

45 ☆☆☆

Calculer les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto x^y$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

46 ☆☆☆ ↗

Calculer les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto \frac{\sin(x + \frac{\pi}{5})e^{xy}}{1 + x^2 + y^2}$.

47 ☆☆☆ ↗ ♥

Calculer les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto \frac{x + e^{\sqrt{y}}}{1 + x^2 y^3} + y$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Applications de la dérivabilité des fonctions réelles

48 ☆☆☆ ♥

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

49 ★☆☆ ↗ ⊖

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{th}(x)| \geq \frac{|x|}{1 + |x|}$.

50 ★☆☆ ⊖ ♥

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

TVI strictement monotone

51 ☆☆☆ ⊕

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : 2^x + 3^x = 5$.

52 ☆☆☆ ♥

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x) = \frac{x\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x}}$.

Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle à préciser.

53 ★☆☆ ⊕ ♥

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) e^{f(x)} = x$. Étudier les variations de f .

54 ☆☆☆ ♥

Considérons la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{e^x + 1}$.

Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Justifier que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et calculer $(f^{-1})' \left(\frac{1}{2} \right)$.

Fonctions usuelles

55 ★☆☆

Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, expression de la dérivée et représentation graphique de $x \mapsto 3^{\frac{1}{x}}$.

56 ★★☆☆ ♥

1. Montrer que $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et déterminer une écriture explicite de sa bijection réciproque que l'on note Argsh .
2. Justifier que Argsh est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une écriture explicite de sa dérivée par deux méthodes.

57 ☆☆☆ 🚲

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer : $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$ et $\text{sh}(a+b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{ch}(a)\text{sh}(b)$.

Indications

1 - indication Quantité conjuguée.

3 - indication Raisonner par l'absurde.

4 - indication 1. Encadrer $f(x)$. 3. Disjonction de cas.

29 - indication Dérivabilité de $x \mapsto \ln|x|$?

33 - indication Étudier $x \mapsto x e^x + 1$ pour appréhender les valeurs prises par cette fonction.

43 - indication Redériver pour trouver le signe de f'' ...

49 - indication Se ramener sur $\mathbb{R}^+$ et choisir judicieusement la fonction à étudier.

50 - indication Récurrence. Dans l'hérédité, prouver l'inégalité par étude de fonction.

51 - indication Justifier qu'il n'y a qu'une solution.

53 - indication Poser $\varphi : x \mapsto x e^x$.

56 - indication Résoudre $y = \text{sh}(x)$ et poser $X = e^x$.

Solutions

1 - solution ➤ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > x^2$, donc $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, donc $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ ce qui entraîne que f est définie sur $\mathbb{R}$.

➤ Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ &= -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}\right) \\ &= -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Donc f est impaire.

2 - solution Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x+n) = \left\lfloor \frac{x+n}{n} \right\rfloor - \frac{\lfloor x+n \rfloor}{n} = \left\lfloor \frac{x}{n} + 1 \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor + n}{n} = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{n} = f(x)$.

3 - solution Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Par l'absurde, supposons $f(a) \leq f(b)$.

Notons $A = f(a)$ et $B = f(b)$. Par hypothèses, on a donc :

➤ $A \leq B$;

➤ $f \circ f(A) > f \circ f(B)$ car $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.

Ces deux points contredisent la croissance supposée de $f \circ f$. C'est donc que $f(a) > f(b)$.

On a ainsi montré que f est strictement décroissante.

4 - solution 1. Notons $n = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. On a $n \leq \frac{1}{x} < n+1$ donc $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ et $\frac{n}{n+1} < f(x) \leq 1$.

De plus, si $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ donc $n = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \rightarrow +\infty$ et ainsi $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$. D'après le théorème des gendarmes, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

2. 0 n'est pas un point fixe. Soit $x \in]0, 1]$: $f(x) = x \iff \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1 \iff 1 \leq \frac{1}{x} < 2 \iff \frac{1}{2} < x \leq 1$.
Bref, l'ensemble des points fixes de f est $]\frac{1}{2}, 1]$.

3. Notons que dans la question 1, on a montré que f est à valeurs dans $[0, 1]$ ce qui permet de donner un sens à la composée $f \circ f$.

➤ $f \circ f(0) = f(1) = 1 = f(0)$.

➤ D'après la question 2, si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$, $f(x) = x$ donc $f \circ f(x) = f(x)$.

➤ Soit $x \in]0, \frac{1}{2}]$. Notons encore $n = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$: $\frac{1}{x} \geq 2$, donc $n \geq 2$, donc $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ (car, par exemple, $2n \geq n+1$).

Ainsi, $f(x) \geq \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$, et d'après la question 2, $f(f(x)) = f(x)$.

En résumé, pour tout $x \in [0, 1]$, $f \circ f(x) = f(x)$ donc $f \circ f = f$.

5 - solution ➤ Cas des fonctions croissantes.

✧ Somme : oui, cours.

✧ Combinaison linéaire : non, par exemple $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est croissante mais pas $(-1) \times \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

✧ Produit : non, cours.

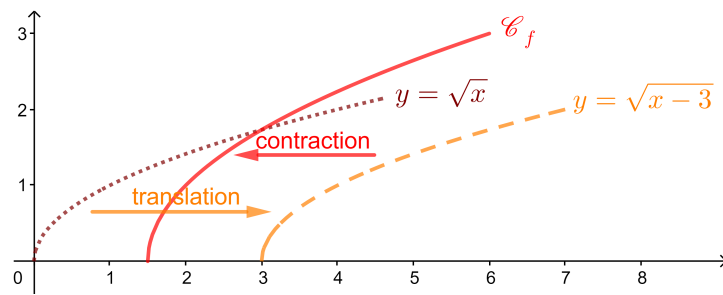
➤ Cas des fonctions monotones.

✧ Somme : non, par exemple $\exp$ et $-\text{Id}_{\mathbb{R}}$ sont monotones, mais pas leur somme.

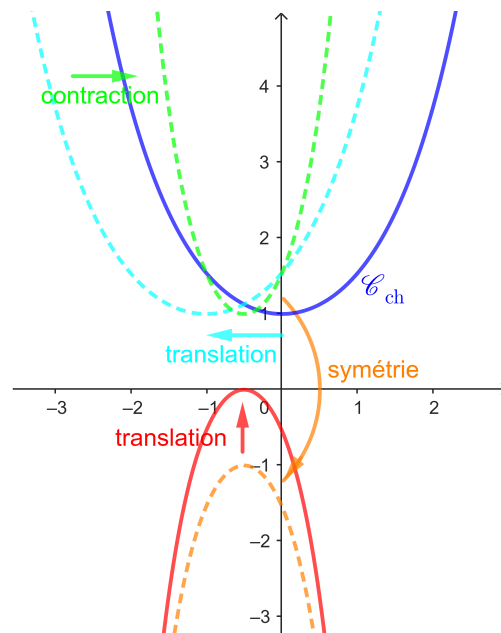
✧ Combinaison linéaire : *a fortiori*, non...

✧ Produit : non, par exemple $\exp$ et $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ sont monotones, mais pas leur produit.

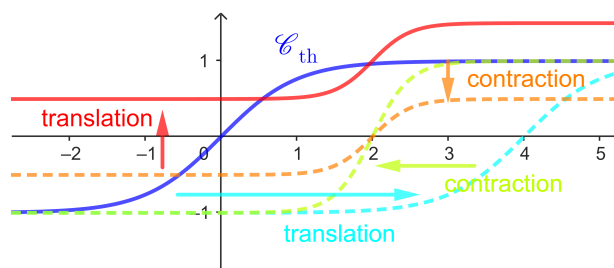
6 - solution On part du graphe de $x \mapsto \sqrt{x}$ pour obtenir celui de $x \mapsto \sqrt{x-3}$ par translation de vecteur $3\vec{i}$ et enfin celui de $x \mapsto \sqrt{2x-3}$ par contraction horizontale de rapport 2.



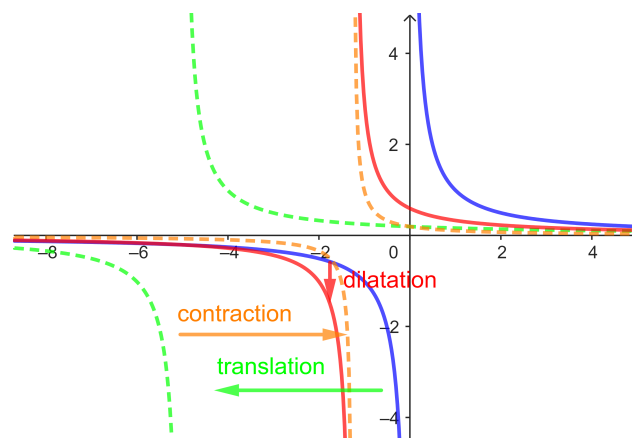
7 - solution De proche en proche, on part de la courbe représentative de ch (en bleu) pour aboutir à la courbe de la fonction souhaitée (en rouge).



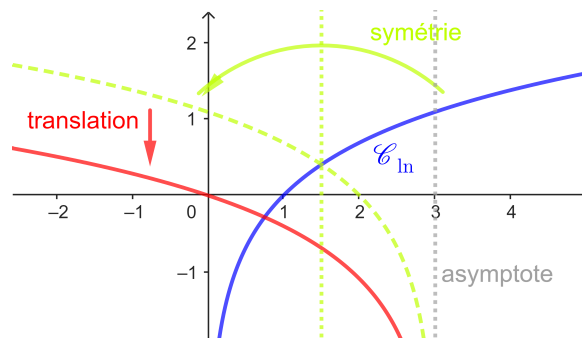
8 - solution De proche en proche, on part de la courbe représentative de th (en bleu) pour aboutir à la courbe de la fonction souhaitée (en rouge).



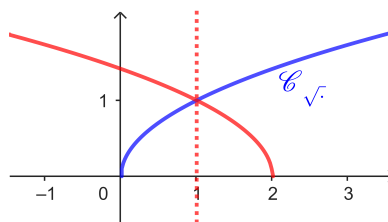
9 - solution De proche en proche, on part de la courbe représentative de la fonction inverse (en bleu) pour aboutir à la courbe de la fonction souhaitée (en rouge).



10 - solution De proche en proche, on part de la courbe représentative de $\ln$ (en bleu) pour aboutir à la courbe de la fonction souhaitée (en rouge).



11 - solution Allure de la courbe. La courbe souhaitée (en rouge) est obtenue par symétrie d'axe $x = \frac{2}{2}$ à partir de la courbe représentative de la fonction racine carrée (en bleu).



Étude des points fixes. Soit $x \in]-\infty, 2]$. On résout : $\sqrt{2-x} = x \iff x = 1$. Un seul point fixe : 1.
Stabilité de $[0, 2]$. Par lecture graphique (et continuité de f), $f([0, 2]) = [0, \sqrt{2}] \subset [0, 2]$, donc $[0, 2]$ est stable par f .
De même, $f([-2, 2]) = [0, 2] \subset [-2, 2]$ donc $[-2, 2]$ est stable par f .

12 - solution f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \frac{19-6x}{(2x+1)^3}$.

13 - solution f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = -\frac{(9+7x)\sqrt{x}}{2x^3(3+x)^3}$.

14 - solution f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$.

15 - solution f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = x(3x^3 + 9x + 2)e^{x^3+2}$.

16 - solution f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ car le polynôme entrant en jeu dans la définition de f est strictement positif sur $\mathbb{R}$ (discriminant strictement positif) et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \frac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+7}}$.

17 - solution f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \frac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$.

18 - solution f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = 24x^7(x+1)(2x+3)^3$.

19 - solution f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \frac{(x^2+2x+3)e^{x+5}}{2\sqrt{(x^2+3)e^{x+5}}}$.

20 - solution f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

21 - solution f est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \frac{1+(x+2)x^2e^x}{x(\ln(x)+x^2e^x)}$.

22 - solution Soit $f = \ln^n$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \frac{n}{x} \ln^{n-1}(x)$.

23 - solution Soit $f(x) = 5^{1/x^n} = \exp(x^{-n} \ln(5))$. f est définie et dérivable (en tant que composée de fonctions dérivables) sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -n \ln(5) x^{-n-1} \exp(\frac{1}{x^n} \ln(5)) = -\frac{n \ln(5)}{x^{n+1}} 5^{1/x^n}$.

24 - solution $f : x \mapsto \ln(\cos(\sqrt{x}) + \ln^8(e+x))$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \frac{1}{\cos(\sqrt{x}) + \ln^8(e+x)} \left(\frac{8 \ln^7(e+x)}{e+x} - \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \right)$.

25 - solution f est définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations algébriques, et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = -2 + 2x + \frac{6}{x^2}$.

26 - solution f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule jamais, et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $f'(x) = -\frac{8}{(2x-3)^5}$.

27 - solution f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et toujours strictement positive, et de la fonction $\ln$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

28 - solution La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x \sin(x^2 + 3).$$

29 - solution f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition de th , dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, par $x \mapsto \ln|x|$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{1/\text{ch}^2(x)}{\text{th}(x)} = \frac{1}{\text{sh}(x)\text{ch}(x)} = \frac{1}{\text{sh}(2x)}$.

30 - solution $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $e^x > 1$ et $\cos(x) \geq -1$, donc $e^x + \cos(x) > 0$. De plus, $e^0 + \cos(0) = 2 > 0$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto (e^{x^2} + \cos(x))^t = \exp\left(t \ln(e^{x^2} + \cos(x))\right)$ est bien définie et dérivable par opérations algébriques et compositions. Puis, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = t(2xe^{x^2} - \sin(x))(e^{x^2} + \cos(x))^{t-1}$.

31 - solution Notons que $f(x) = \exp(\ln(3-x^2)\ln(\pi) - \pi \ln(\ln(3-x^2)))$.
 f est définie et dérivable sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, et $\forall x \in] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, $f'(x) = -\frac{2x\pi^{\ln(3-x^2)} \ln^{-(\pi+1)}(3-x^2)(\ln(\pi)\ln(3-x^2)-\pi)}{3-x^2}$.

32 - solution 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ existe $\iff 3x + \frac{2}{x} > 0 \iff \frac{3x^2+2}{x} > 0$.

Le numérateur étant toujours strictement positif, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{+*}$.

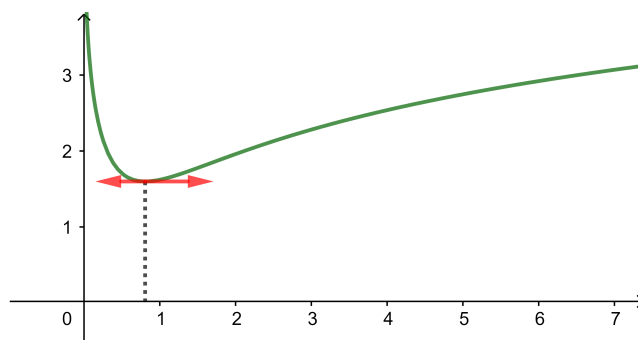
2. Par opérations algébriques et composition, f est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

$$\text{Et } \forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{3 - \frac{2}{x^2}}{3x + \frac{2}{x}} = \frac{3x^2 - 2}{x(3x^2 + 2)} = \frac{3(x + \sqrt{\frac{2}{3}})}{x(3x^2 + 2)} \left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Cette dernière fraction est positive, de sorte que $f'(x)$ est du signe de $x - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

f est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{\frac{2}{3}}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty[$.

3. Voici une représentation graphique :



33 - solution 1. L'équation $xe^x + 1 = 0$ n'est pas simple à résoudre...



Étude de fonction

Posons $\varphi : x \mapsto xe^x + 1$. Par opérations algébriques, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (x+1)e^x$, qui est du signe de $x+1$. Ainsi, φ est décroissante sur $] -\infty, -1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$. Comme $\varphi(-1) = 1 - e^{-1} > 0$, on en déduit que φ est de signe constant strictement positif sur $\mathbb{R}$.

De fait, f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2. Par opérations algébriques, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x}{(xe^x + 1)^2}(x + 2 - e^x)$.

3. Posons $\psi : x \mapsto x + 2 - e^x$. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi'(x) = 1 - e^x$. ψ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $\psi(0) = 1 \neq 0$ et $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -\infty$.

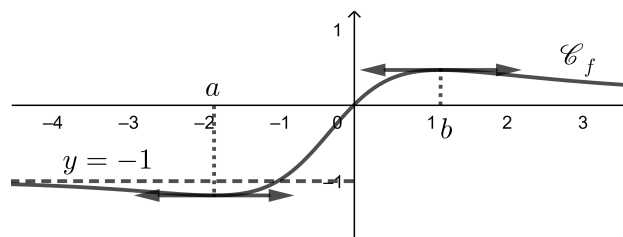
➤ D'après le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone sur $\mathbb{R}^-$, $\psi : \mathbb{R}^- \rightarrow]-\infty, -1[$ est bijective. Autrement dit, l'équation $e^x = x + 2$ admet une unique solution a dans $\mathbb{R}^-$.

➤ De même sur $\mathbb{R}^+$... D'où b .

4. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	-1	$f(a)$	$f(b)$	0	

Le graphe :



34 - solution Récurrence : $\frac{d^n x e^x}{dx} = (x + n) e^x$.

35 - solution Récurrence : $\frac{d^n x^2 e^x}{dx} = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x$.

36 - solution En tant qu'inverse d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant jamais, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Par récurrence sur n : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

37 - solution Définie et continue sur $\mathcal{D} = [1, +\infty[$.
Dérivable sur $]1, +\infty[$, et $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$.

Non dérivable en 1 puisque son taux d'accroissement en 1 n'admet pas de limite finie en 1 :

$$T(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \sqrt{\frac{\ln(x)}{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty.$$

38 - solution f est définie sur $\mathbb{R}^+$. En tant que composée de $x \mapsto 5 - \sqrt{x}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et la fonction cube, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}(5 - \sqrt{x})^2$.

Dérivabilité en 0. f n'est pas dérivable en 0 car son taux d'accroissement n'admet pas une limite finie en 0 :

$$T(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(5 - \sqrt{x})^3}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

39 - solution f est définie sur $\mathbb{R}^+$. En tant que quotient et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f'_5 : x \mapsto \frac{\sqrt{x}(9-x^2)}{2(x^2+3)^2}$.

Dérivabilité en 0. $T(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, limite finie, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Remarque : l'expression générale précédente est donc encore valable pour $x = 0$, ce qui aurait pu être obtenu par le théorème de la limite de la dérivée.

40 - solution Définie sur $[-\frac{1}{3}, +\infty[$, dérivable sur $] -\frac{1}{3}, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} e^{\sqrt{3x+1}}$.

Dérivabilité en $-\frac{1}{3}$. En posant $t = x + \frac{1}{3} \xrightarrow{x \rightarrow (\frac{1}{3})^+} 0^+$, on a $T(x) = \frac{f(x) - f(-\frac{1}{3})}{x + \frac{1}{3}} = \frac{e^{\sqrt{3t}}}{t} \xrightarrow{x \rightarrow (\frac{1}{3})^+} +\infty$, donc f n'est pas dérivable en $-\frac{1}{3}$.

41 - solution Définie sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $x \mapsto 2 \cos(\sqrt{x}) (\cos(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \sin(\sqrt{x}))$.

Dérivabilité en 0. $T(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2 \cos^2(\sqrt{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$.

Remarque : l'expression générale précédente est donc encore valable pour $x = 0$, ce qui aurait pu être obtenu par le théorème de la limite de la dérivée.

42 - solution Notons que $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$. Ainsi, f est effectivement définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par opérations algébriques et composition, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = (1 + \ln(x)) e^{x \ln(x)}$ et $f''(x) = \left(\frac{1}{x} + (1 + \ln(x))^2\right) e^{x \ln(x)}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{1}{x} > 0$ et $(1 + \ln(x))^2 \geq 0$, donc $f''(x) \geq 0$. Donc f est convexe.

43 - solution f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = (\ln(x) + \frac{1}{x}) e^x$, $f''(x) = (\ln(x) + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}) e^x$.

Notons $\varphi : x \mapsto \ln(x) + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} > 0$, donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ par croissances comparées. $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone, φ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}^{+*}$ en changeant de signe, donc f admet un unique point d'inflexion.

44 - solution Existence des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ par composition.

Et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \text{sh}(x + y)$.

Par symétrie des rôles de x et y , on peut donner l'autre résultat sans calcul : $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \text{sh}(x + y)$.

45 - solution Notons que $f(x, y) = e^{y \ln(x)}$. Existence des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par opérations algébriques et composition. Et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$:

- $\triangleright \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1}$.
- $\triangleright \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln(x) x^y$.

46 - solution Existence des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ par opérations algébriques. Et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- $\triangleright \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(\cos(x + \frac{\pi}{5}) + y \sin(x + \frac{\pi}{5})) e^{xy} (1 + x^2 + y^2) - 2x \sin(x + \frac{\pi}{5}) e^{xy}}{(1 + x^2 + y^2)^2}$.
- $\triangleright \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x + \frac{\pi}{5}) \frac{(x(1 + x^2 + y^2) - 2y) e^{xy}}{(1 + x^2 + y^2)^2}$.

47 - solution Existence des dérivées partielles sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ par opérations algébriques et composition. Et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- $\triangleright \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(1 + x^2 y^3) - 2xy^3(x + e^{\sqrt{y}})}{(1 + x^2 y^3)^2}$.
- $\triangleright \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}(1 + x^2 y^3) - 3x^2 y^2(x + e^{\sqrt{y}})}{(1 + x^2 y^3)^2} + 1$.

48 - solution Étude de $x \mapsto \text{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$.

49 - solution La relation est inchangée si l'on change x en $-x$, il suffit donc de l'établir sur $\mathbb{R}^+$, intervalle sur lequel th est positive. Il suffit donc de prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\text{th}(x) \geq \frac{x}{1+x}$.



On préfère dériver un produit plutôt qu'un quotient...

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = (1 + x) \text{th}(x) - x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \text{th}(x) + (1 + x)(1 - \text{th}^2(x)) - 1 = (1 - \text{th}(x))[(1 + x)(1 + \text{th}(x)) - 1] \geq 0$.

Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq f(0) = 0$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $(1 + x) \text{th}(x) \geq x$, soit $\text{th}(x) \geq \frac{x}{1+x}$.

50 - solution Prouvons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

- $\triangleright$ *Initialisation.* Si $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est établie.

➤ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On note $\varphi : x \mapsto e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par opérations algébriques, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi'(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

De fait, par hypothèse de récurrence, $\varphi'(x) \geq 0$ ce qui entraîne que φ est croissante.

En conséquence, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est prouvée.

D'où le résultat.

51 - solution 1 est solution évidente.

De plus, $x \mapsto 2^x + 3^x$ est strictement croissante, donc il y a unicité de la solution.

52 - solution f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \frac{3x+2x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} > 0$. Ainsi, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $f(0) = -1$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[-1; +\infty[$.

53 - solution Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $\varphi(x) = x e^x$. φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, de sorte que, d'après le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone, $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bijective.

De fait : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) e^{f(x)} = x \iff \varphi \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^+} \iff f = \varphi^{-1}$.

Comme φ est strictement croissante, il en est de même de $f = \varphi^{-1}$.

54 - solution f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On observe $f(0) = \frac{1}{2}$, donc $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$. $f'(0) > 0$ donc f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{4}{3}$.

55 - solution $f(x) = 3^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(3)}$, définie pour $x \in \mathbb{R}^*$. Par composition de fonctions usuelles dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{\ln(3)}{x^2} 3^{\frac{1}{x}} < 0$.

Quand $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ donc, par composition, $f(x) \rightarrow 1$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow +\infty$; et quand $x \rightarrow 0^-$, $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ donc $f(x) \rightarrow 0$. f n'a donc pas de limite en 0, mais sa courbe représentative possède tout de même une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (quand x tend vers 0, par valeurs supérieures).

D'où le tableau de variations :

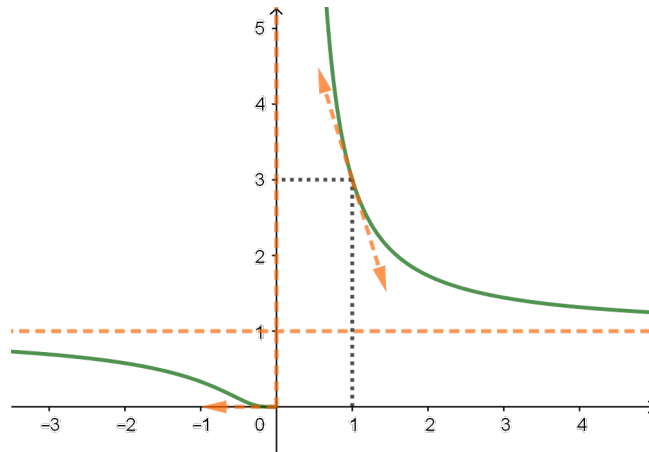
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	—
f	1	0	$+\infty$

Comme la limite de f en 0^- est finie, égale à 0, on peut encore s'intéresser à l'éventuelle demi-tangente en 0^- . Pour cela, on observe le taux d'accroissement de f en 0^- , avec la valeur 0 jouant le rôle de « $f(0)$ » :

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{f(x) - 0}{x - 0} \\ &= \frac{f(x)}{x} \\ &= \frac{e^{-\frac{\ln(3)}{t}}}{t} \quad \text{en posant } t = -x, \\ &= -e^{-\frac{\ln(3)}{t} - \ln(t)} \quad \text{car, comme } t \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0^+, \text{ on peut écrire } t = e^{\ln(t)}. \end{aligned}$$

On écrit $-\frac{\ln(3)}{t} - \ln(t) = -\frac{\ln(3)}{t} \left(1 + \frac{t \ln(t)}{\ln(3)}\right)$. Par croissances comparées, $t \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, donc par addition et multiplication, $-\frac{\ln(3)}{t} - \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -\infty$ et, par composition par la fonction exponentielle, $T(x) \rightarrow 0$.

Ainsi, la courbe représentative de f admet une demi-tangente horizontale en 0^- .

**56 - solution**

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout $(E) : y = \text{sh}(x)$. *Idée* : poser $X = e^x$.

$$(E) \iff e^x - e^{-x} = 2y \iff X^2 - 2yX - 1 = 0.$$

Cette équation du second degré admet pour discriminant $\Delta = 4(y^2 + 1) > 0$, elle a donc deux solutions : $y \pm \sqrt{y^2 + 1}$.

$$\text{Ainsi, } (E) \iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Or, $y^2 + 1 > y^2$, donc $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = |y| \geq \pm y$ ce qui entraîne que :

$$\triangleright y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 : \text{ on l'exclut.}$$

$$\triangleright y + \sqrt{y^2 + 1} > 0.$$

$$\text{Pour finir : } (E) \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Indépendamment de la valeur de $y \in \mathbb{R}$, on trouve toujours une unique solution, on en conclut que $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et $\forall y \in \mathbb{R}, \text{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.

Remarque : en ayant appliqué au début le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone, on aurait pu affirmer d'entrée que sh est bijective. Et on aurait ainsi pu se passer de vérifier que $y + \sqrt{y^2 + 1}$ est > 0 . Cela ne nous a pas posé problème ici, mais dans d'autres exercices, cela pourrait s'avérer utile.

2. En tant que bijection réciproque d'une fonction impaire, dérivable et dont la dérivée ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, Argsh est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculons Argsh'.

$\triangleright$ *Méthode 1.* Calcul direct à partir de l'expression explicite obtenue à la question 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh}'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$\triangleright$ *Méthode 2.* Calcul à partir de l'expression explicite de la dérivabilité d'une bijection réciproque.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(\text{Argsh}(x))} = \frac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}(\text{Argsh}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}(\text{Argsh}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Remarque : on peut aussi justifier l'impairité à partir de l'expression explicite obtenue à la question précédente, mais c'est paradoxalement moins simple...

57 - solution

Développer le membre de droite, c'est élémentaire.