

FRR pour commencer

1 ★☆☆ ♥

On définit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$.

1. Justifier que f est bien définie.
2. Calculer $f(\mathbb{R})$ de deux manières différentes. L'application f est-elle surjective?
3. L'application f est-elle injective?
4. Montrer que la restriction g de f à $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ réalise une bijection sur un intervalle à préciser et déterminer la bijection réciproque g^{-1} de g .

2 ☆☆☆ ⊕

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur un ensemble à préciser, et déterminer f^{-1} .

3 ★☆☆

Étudier la bijectivité de la fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(x)} & \text{si } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[; \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

4 ☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$. Calculer $\text{Im}(f_n)$.

5 ☆☆☆

L'application $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 2}$ est-elle injective? Calculer $f([-1, 2])$.

Applications sur des ensembles plus compliqués

6 ★☆☆

Que dire de l'injectivité et de la bijectivité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$.

7 ★★★ ♥

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par : $f(x, y) = (x^2 - y^2, x + y)$.

1. f est-elle injective?
2. f est-elle surjective?
3. Montrer que f est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans l'ensemble $F = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, v \neq 0 \text{ ou } u = v = 0\}$.

8 ☆☆☆

Étudier injectivité et surjectivité de $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 6n + 1$.

9 ★☆☆ ♥

On définit deux applications $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ et $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

1. f et g sont-elles injectives? surjectives?

2. Identifier $g \circ f$ et $f \circ g$. Que peut-on en déduire au sujet du théorème de neutralisation ?

10 ★☆☆ ⊕

Étudier injectivité et surjectivité de $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \frac{(-1)^n}{4} (2n + 1 - (-1)^n)$.

11 ★★★ X-ESPCI 17

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3 \text{Id}_{\mathbb{N}^*}$.

Grimpons encore d'un étage

12 ★☆☆ ♥

Soit E un ensemble. On note S l'ensemble des bijections de E dans E et on fixe $b \in S$.

Pour toute bijection $s \in S$, on pose $\varphi_b(s) = b \circ s$.

Montrer que φ_b est une bijection de S dans S et expliciter sa bijection réciproque.

13 ★☆☆ ⊕

À toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on associe la suite v par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$, ce qui permet de définir l'application :

$$S : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u & \mapsto & v \end{cases}.$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de S .

14 ★★★ ⊕

Soient A et B deux parties d'un ensemble E et l'application : $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$.

1. Déterminer $f(A)$, $f(B)$, $f(A \cup B)$, $f(A \cap B)$ et $f(E)$.
2. Montrer que f est injective ssi $A \cup B = E$.
3. Montrer que f est surjective ssi $A \cap B = \emptyset$.

Des propriétés à retenir...

15 ☆☆☆ ♥

Soient E, F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que, pour tous $B_1, B_2 \subset F$:

$$B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

Que dire de l'implication réciproque ?

16 ☆☆☆ ♥

Soient E, F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que, pour tous $A_1, A_2 \subset E$:

$$A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2).$$

Que dire de l'implication réciproque ?

17 ☆☆☆ ♥

Soient E, F deux ensembles, B_1 et B_2 des parties de F et $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que :

1. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

18 ★☆☆ ♥

Soient E, F deux ensembles, A_1 et A_2 des parties de E et $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer les inclusions suivantes et étudier les inclusions réciproques.

1. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

Exercices plus abstraits

19 ★☆☆ ♥

Soient E, F deux ensembles.

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective.

1. Prouver que f est injective et surjective.
2. Qu'en est-il de g ?

20 ☆☆☆

Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications. On suppose que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives. Montrer que f et g sont bijectives.

21 ★★☆☆ ♥

Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $f^n = f$ (au sens de la composition). Montrer que f est injective **ssi** f est surjective.

22 ★★☆☆ ♥

Soient E, F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application.

On dit que f est *inversible à gauche* lorsqu'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$.

On dit que f est *inversible à droite* lorsqu'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{Id}_F$.

1. En ces termes, que dire si f est bijective?
2. Montrer que f est injective **ssi** f est inversible à gauche.
3. Montrer que f est surjective **ssi** f est inversible à droite.

Relations

23 ☆☆☆ ♥ Divisibilité

La relation de divisibilité est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$? Sur $\mathbb{N}$? Si oui, l'ordre est-il total?

24 ★☆☆ ♠ ♥ Ordre lexicographique

Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on pose :

$$z \preccurlyeq z' \iff \begin{cases} \text{Re}(z) < \text{Re}(z') \\ \text{ou} \\ \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) \leq \text{Im}(z') \end{cases}.$$

1. Justifier que $-1 + i \preccurlyeq 0$, $0 \preccurlyeq 1 + i$, et $i \preccurlyeq \frac{1}{10} - i$.
2. Représenter graphiquement l'ensemble $P = \{z \in \mathbb{C}, 0 \preccurlyeq z\}$.
3. Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre totale $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{C}$.
4. Montrer que la relation $\preccurlyeq$ est compatible avec l'addition, c'est-à-dire que, pour $z_1, z_2, z'_1, z'_2 \in \mathbb{C}$, si $z_1 \preccurlyeq z'_1$ et $z_2 \preccurlyeq z'_2$, alors $z_1 + z_2 \preccurlyeq z'_1 + z'_2$.
5. Montrer que la relation $\preccurlyeq$ n'est pas compatible avec la multiplication des nombres de $P \setminus \{0\}$. Cette « propriété » entraîne qu'on ne retient pas cette relation d'ordre pour les calculs dans $\mathbb{C} \dots$ Plus d'inégalité dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ désormais !

25 ★☆☆ ⊕ Bon ordre

Soient E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E . On dit que $(E, \preccurlyeq)$ est *bien ordonné* lorsque toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui n'est pas bien ordonné.
2. Montrer que, si $(E, \preccurlyeq)$ est bien ordonné, alors il est totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie?

26 ☆☆☆ ⊕

Pour $(m, n), (p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $(m, n) \mathcal{R} (p, q) \iff mq = np$.
Définit-on ainsi une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$? Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$?

27 ★☆☆ ♥

Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on pose $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E .
2. Montrer que f est injective si et seulement si toute classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ contient exactement un élément.

3. Dans cette question, on suppose que $E = F = \mathbb{R}$.
- (a) Expliciter la classe d'équivalence $\bar{x}$ d'un réel x donné, lorsque $f : x \mapsto x^2$.
 - (b) Même question lorsque $f = \cos$.
4. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$.
- (a) Décrire géométriquement la classe d'équivalence $\overline{(x, y)}$ d'un couple de réels (x, y) donné, lorsque f désigne la fonction $f : (x, y) \mapsto x + y$.
 - (b) Même question lorsque $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

28 ★★☆☆ ⊕

Soit E un ensemble non vide. On considère les relations sur $F = E^E$ (où la puissance est relative à la composition) :

$$\triangleright f \sim g \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, f^n = g^n;$$

$$\triangleright f \approx g \iff \exists n, m \in \mathbb{N}^*, f^n = g^m.$$

1. Montrer que $\sim$ et $\approx$ sont des relations d'équivalence.
2. Pour $f \in F$, on note $f^\sim$ (resp. $f^\approx$) les classes d'équivalence modulo $\sim$ (resp. $\approx$).
 - (a) Montrer que, pour $f \in F$, $f^\sim \subset f^\approx$.
 - (b) Montrer que toute classe d'équivalence pour $\approx$ est réunion de classes d'équivalence pour $\sim$.
 - (c) Que peut-on dire de f s'il existe g , injective, dans $f^\approx$? Même question si g est surjective.

Indications

1 - indication 2. *Méthode 1.* Tableau de variation. *Méthode 2.* Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x ; élever au carré si possible, polynôme du second degré, discriminant...

2 - indication *Astuce :* observer $f \circ f$. *Méthode plus « naturelle » :* résoudre $y = f(x)$.

7 - indication 2. Lire la question 3.

10 - indication Remarquer que $f(n) \geq 0$ si n est pair et $f(n) < 0$ sinon. Fixer ensuite $m \in \mathbb{Z}$ et résoudre $m = f(n)$ en distinguant $m < 0$ et $m \geq 0$.

11 - indication Analyse-synthèse. Pour l'analyse, chercher $f(1)$.

13 - indication Voir que $S(u)$ ne dépend pas du premier terme de u .

14 - indication 2. $\Leftarrow$ Pour $X, X' \subset E$ tels que $f(X) = f(X')$, observer $X \cap (A \cup B)$ et $X' \cap (A \cup B) = X'$.
3. $\Rightarrow$ Raisonner par l'absurde.

21 - indication $\Leftarrow$ Écrire $f^n(y) = f(f^{n-1}(y))$.

$\Rightarrow$ Considérer $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ et justifier l'existence de $t, t' \in E$ tels que $x = f^{n-1}(t)$ et $x' = f^{n-1}(t')$.

25 - indication 2. Si $x, y \in E$, $\{x, y\}$ est toujours une partie non vide de E .

26 - indication Sur $\mathbb{N}^2$, observer la transitivité des éléments ayant une composante nulle.

28 - indication 1. Pour la transitivité, observer $f^{n_1+n_2}$. 2.b. Reprendre la démo du cours sur les classes d'équivalence.

Solutions

1 - solution

1. Le polynôme $X^2 - 3X + 3$ admet un discriminant < 0 , il est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$, égal au signe du coefficient dominant 1. Ainsi, le polynôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, il est clair que si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}$. Ainsi, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie.

2. **M1** Tableau de variation.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}$. $f'(x)$ est donc du signe de $2x - 3$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$\searrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\nearrow$	$+\infty$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on lit $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$.

M2 Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation $y = f(x)$.

➤ Si $y < 0$, comme $f(x) \geq 0$, l'équation n'a pas de solution.

➤ Sinon, comme y et $\sqrt{x^2 - 3x + 3}$ sont tous les deux positifs ou nuls, on peut élever au carré en conservant l'équivalence :

$$\begin{aligned} y = \sqrt{x^2 - 3x + 3} &\iff y^2 = x^2 - 3x + 3 \\ &\iff x^2 - 3x + 3 - y^2 = 0. \end{aligned}$$

Équation polynomiale du second degré, de discriminant $\Delta = 9 - 4(3 - y^2) = 4y^2 - 3$, qui admet des solutions **ssi** $\Delta \geq 0$ i.e. $y \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$.

Ainsi, $\text{Im}(f) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$.

3. $f(1) = f(2)$; or, $1 \neq 2$, donc f n'est pas injective.

4. Pour la bijectivité, on propose deux méthodes.

M1 On réutilise les questions précédentes.

f est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$, donc g est injective.

D'après la question 3, $g\left(\left[\frac{3}{2}, +\infty \right[\right) = f(\mathbb{R}) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$ donc g réalise une bijection de $\left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$ dans $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$.

M2 On applique le théorème de la bijection.

g est strictement croissante et continue sur $\left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$. $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$ dans $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$.

Ensuite, pour l'expression de la bijection réciproque de g , on fixe $y \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$ et on résout l'équation $y = g(x)$ d'inconnue $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$.

Il suffit de reprendre la question 3 :

$$\begin{aligned} y = \sqrt{x^2 - 3x + 3} &\iff y^2 = x^2 - 3x + 3 \\ &\iff x^2 - 3x + 3 - y^2 = 0 \\ &\iff y = \frac{3 \pm \sqrt{4y^2 - 3}}{2} \\ &\iff y = \frac{3 + \sqrt{4y^2 - 3}}{2} \quad \text{car on exclut } \frac{3 - \sqrt{4y^2 - 3}}{2} \text{ qui est } < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $g^{-1} : y \mapsto \frac{3 + \sqrt{4y^2 - 3}}{2}$.

Remarque. En toute rigueur, si $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a exclu à tort $\frac{3 - \sqrt{4y^2 - 3}}{2}$, puisqu'il vaut $\frac{3}{2}$. C'est le cas où $\sqrt{4y^2 - 3} = 0$, donc l'autre racine est également $\frac{3}{2}$, donc on ne l'a pas vraiment exclue... Tout va bien.

2 - solution

On observe que $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, donc d'après le théorème de neutralisation, f est bijective et $f^{-1} = f$. On peut aussi noter que f est une involution, et qu'elle est de ce fait injective.

3 - solution Soit $y \in \mathbb{R}$.

- Si $y = 0$, l'équation $y = f(x)$ admet évidemment la solution 1; et c'est la seule puisque l'expression $\frac{1}{\ln(x)}$ ne s'annule jamais.
- Si $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\iff y = \frac{1}{\ln(x)} \quad \text{car } f(1) = 0 \neq y, \\
 &\iff \frac{1}{y} = \ln(x) \\
 &\iff x = e^{\frac{1}{y}}.
 \end{aligned}$$

Donc l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Dans tous les cas, y admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}^{+*}$ par f . Bref, f est bijective.

4 - solution f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'_n(x) = x^{n-1}(n \ln(x) - 1)$. De fait, $f'_n(x)$ est du signe de $n \ln(x) - 1$.

Or, $n \ln(x) - 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq \frac{1}{n} \iff x \geq e^{1/n}$.

Bref, f_n est décroissante sur $]0, e^{1/n}]$ et croissante sur $[e^{1/n}, +\infty[$.

Son minimum est $f_n(e^{1/n}) = \frac{e}{n}$, et $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Par continuité, on conclut que $\text{Im}(f_n) = [e^{1/n}, +\infty[$.

5 - solution

- Le tableau de variations permet facilement de comprendre que f n'est pas injective. Mais...



Un contre exemple suffit !

$f(-1) = f(0)$ donc f n'est pas injective.

- Tableau de variations : f est strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, strictement croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. On lit ensuite, par continuité de $f : f(]-1, 2]) = [\frac{7}{4}, 2\sqrt{2}[$.

6 - solution

f n'est ni injective (car $f(1, 0) = (1, 0) = f(0, 1)$) ni surjective (car $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$).

7 - solution

1. $f(1, -1) = (0, 0) = f(0, 0)$ donc f n'est pas injective.

2. $(1, 0)$ n'a pas d'antécédent, preuve par l'absurde : supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (1, 0)$. Alors $x = -y$, donc $x^2 - y^2 = x^2 - (-x)^2 = 0 \neq 1$. Absurde.

3. On écrit $F = \{(0, 0)\} \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)$.

➤ On a déjà trouvé un (et même plusieurs) antécédent(s) à $(0, 0)$: $f(0, 0) = (0, 0)$.

➤ Soit $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (u, v)$. On résout :

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = (u, v) &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ x + y = v \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (x - y)(x + y) = u \\ x + y = v \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (x - y)v = u \\ x + y = v \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - y = \frac{u}{v} \\ x + y = v \end{cases} \quad \text{car } v \neq 0, \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(v + \frac{u}{v} \right) \\ y = \frac{1}{2} \left(v - \frac{u}{v} \right) \end{cases}.
 \end{aligned}$$

On a donc trouvé un (unique) antécédent à $(u, v) : (\frac{1}{2}(v + \frac{u}{v}), \frac{1}{2}(v - \frac{u}{v}))$.

En résumé, on a bien trouvé un antécédent à tout élément de F donc $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow F$ est surjective.

Notons au passage que seul $(0, 0)$ admet plusieurs antécédents, qui sont tous les éléments de $\{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, f réalise une bijection de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \neq 0\}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

8 - solution Injective (car strictement croissante) mais non surjective (2 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}^*$ par f).

9 - solution 1. f est injective (suite strictement croissante), non surjective (1 n'a pas d'antécédent par f puisqu'il n'est pas pair).
 g est surjective (tout $m \in \mathbb{N}$ a pour antécédent $2m$, par exemple), non injective (car $g(0) = 0 = g(1)$).
 2. $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$, $f \circ g = 2 \lfloor \frac{\cdot}{2} \rfloor$.
 On a donc $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$, alors que ni f ni g ne sont bijectives. On note donc que dans le théorème de neutralisation, il est indispensable d'avoir les deux égalités $f \circ g = \text{Id}$ et $g \circ f = \text{Id}$ pour conclure que f et g sont bijectives.

10 - solution On observe : $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \geq 0 & \text{si } n \in 2\mathbb{N}, \\ -\frac{n+1}{2} < 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Soit alors $m \in \mathbb{Z}$:

- si $m \geq 0$, il ne peut avoir qu'un antécédent pair : $m = f(n) \iff m = \frac{n}{2} \iff n = 2m$. Ce nombre étant effectivement un entier naturel pair, m possède effectivement un unique antécédent.
- si $m < 0$, il ne peut avoir qu'un antécédent impair : $m = f(n) \iff m = -\frac{n+1}{2} \iff n = -2m + 1$. Ce nombre étant effectivement un entier naturel impair, m possède effectivement un unique antécédent.

Dans tous les cas, m possède un unique antécédent dans $\mathbb{N}$ par f si bien que l'on peut conclure que f est bijective.

11 - solution Analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une solution.

- $(\text{Id}_{\mathbb{N}^*} + f + f \circ f) \circ f = 3\text{Id}_{\mathbb{N}^*}$ est injective donc f est injective.
- $f(1) + f(f(1)) + f(f(f(1))) = 3$, donc $[f(1) - 1] + [f(f(1)) - 1] + [f(f(f(1))) - 1] = 0$.
 Or, f est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc la somme précédente est formée de termes tous positifs ou nuls ; du fait qu'elle est nulle, on déduit que chacun des trois termes est nul et en particulier $f(1) = 1$.
- Par récurrence forte, on montre que $f(n) = n$.
 - ✧ L'initialisation a été prouvée ci-dessus.
 - ✧ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(k) = k$. Montrons que $f(n+1) = n+1$.
 On sait que $f(n+1) \in \mathbb{N}^*$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) = k$. Comme f est injective, on a forcément $f(n+1) \geq n+1$.
 De fait, pour la même raison d'injectivité, $f(f(n+1)) \geq n+1$ et $f(f(f(n+1))) \geq n+1$.
 Or, $f(n+1) + f(f(n+1)) + f(f(f(n+1))) = 3(n+1)$, donc :

$$[f(n+1) - (n+1)] + [f(f(n+1)) - (n+1)] + [f(f(f(n+1))) - (n+1)] = 0.$$

On retrouve une somme nulle formée de trois termes positifs ou nuls, c'est donc qu'ils sont tous nuls et *a fortiori* $f(n+1) = n+1$.

Ainsi $f = \text{Id}_{\mathbb{N}^*}$.

Synthèse. $f = \text{Id}_{\mathbb{N}^*}$ convient évidemment.

12 - solution ➤ Si $s \in S$, par composition de bijections, $\varphi_b(s) = b \circ s \in S$ donc φ_b est bien une application de S dans S .

- Soit $s' \in S$. On résout l'équation $\varphi_b(s) = s'$ d'inconnue $s \in S$:

$$\varphi_b(s) = s' \iff b \circ s = s' \iff s = b^{-1} \circ s' \iff s = \varphi_{b^{-1}}(s').$$

L'équation admet donc une unique solution donc φ_b est une bijection de S dans S , et $\varphi_b^{-1} = \varphi_{b^{-1}}$.

13 - solution ➤ Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $S(u)$ est une suite qui ne dépend pas du premier terme u_0 de u , donc S ne peut pas être injective. Plus rigoureusement, si u est la suite nulle et u' la suite définie par $u'_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u'_n = 0$, alors $u \neq u'$ et $S(u) = S(u')$...

- Soit $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ quelconque. On pose $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_{n-1}$. Alors $S(u) = v$. Par conséquent, S est surjective.

14 - solution 1. $f(A) = (A, A \cap B)$, $f(B) = (A \cap B, B)$, $f(A \cup B) = (A, B)$, $f(A \cap B) = (A \cap B, A \cap B)$, $f(E) = (A, B)$.

- 2. $\Leftarrow$ supposons $A \cup B = E$. Montrons que f est injective. Soient $X, X' \subset E$ tels que $f(X) = f(X')$, i.e. on a $X \cap A = X' \cap A$ et $X \cap B = X' \cap B$. Alors :

$$\begin{aligned} X = X \cap (A \cup B) &= (X \cap A) \cup (X \cap B) \\ &= (X' \cap A) \cup (X' \cap B) \\ &= X' \cap (A \cup B) = X'. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ supposons f injective : comme $f(A \cup B) = (A, B) = f(E)$, on a $A \cup B = E$.

3. $\Leftarrow$ supposons $A \cap B = \emptyset$. Montrons que f est surjective. Soit $(Y_1, Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Posons $X = Y_1 \cap Y_2$. Comme $A \cap B = \emptyset$, $A \cap Y_2 = \emptyset$ et $Y_1 \cap B = \emptyset$. Ainsi $f(X) = (Y_1, Y_2)$.
 $\Rightarrow$ Supposons f surjective. On sait déjà $\emptyset \subset A \cap B$. Montrons que $A \cap B \subset \emptyset$. Soit $x \in A \cap B$: on cherche une contradiction. $(\{x\}, \emptyset) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ donc il existe $X \subset E$ tel que

$$f(X) = (\{x\}, \emptyset), \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} X \cap A = \{x\} \\ X \cap B = \emptyset \end{cases}.$$

On en déduit que $x \in X$, or $x \in B$, donc $x \in X \cap B$: contradiction.

15 - solution Supposons $B_1 \subset B_2 \subset F$. Soit $x \in f^{-1}(B_1)$: on a alors $f(x) \in B_1$. Or, $B_1 \subset B_2$, donc $f(x) \in B_2$, ce qui assure que $x \in f^{-1}(B_2)$. D'où $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
 L'inclusion réciproque est fausse : $f : x \mapsto x^2$, $B_1 = [-1, 1]$, $B_2 = [0, 4]$.

16 - solution Supposons $A_1 \subset A_2 \subset E$. Soit $y \in f(A_1)$: $\exists x \in A_1 \subset A_2$; $y = f(x)$, ainsi $y \in f(A_2)$.
 L'inclusion réciproque est fausse : $f : x \mapsto x^2$, $A_1 = [-1, 1]$, $A_2 = [0, 2]$.

17 - solution 1. Soit $x \in E$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\iff (f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2) \\ &\iff (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (x \in f^{-1}(B_2)) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

2. Soit $x \in E$. On raisonne encore par équivalence :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\iff (f(x) \in B_1) \vee (f(x) \in B_2) \\ &\iff (x \in f^{-1}(B_1)) \vee (x \in f^{-1}(B_2)) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

18 - solution 1. Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Alors $\exists x \in A_1 \cap A_2$, $y = f(x)$. Comme $x \in A_1$, $f(x) \in f(A_1)$; et de même $f(x) \in f(A_2)$. Donc $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, d'où l'inclusion.
 Inclusion réciproque fausse :

➤ on peut en avoir l'intuition en tentant de « remonter » les liens de déduction précédents. si $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, alors y s'écrit $y = f(x)$ avec $x \in A_1$ et $y = f(x')$ avec $x' \in A_2$. Mais rien ne dit que l'on peut choisir $x = x'$...

➤ le plus simple pour être convaincant est de trouver un contre-exemple : $f : x \mapsto x^2$, $A_1 = [-1, 0]$, $A_2 = [0, 1]$.

2. Soit $y \in F$. On raisonne directement par équivalence :

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\iff \exists x \in A_1 \cup A_2, y = f(x) \\ &\iff \exists i \in \{1, 2\}, \exists x \in A_i, y = f(x) \\ &\iff \exists i \in \{1, 2\}, y \in f(A_i) \\ &\iff y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

Là, il y a égalité.

19 - solution 1. $(f \circ g) \circ f$ est bijective donc injective, donc f est injective.
 Et $f \circ (g \circ f)$ est également bijective donc surjective, donc f est surjective.

2. Notons $h = f \circ g \circ f$. f est bijective donc elle admet une bijection réciproque f^{-1} . En composant à gauche et à droite par f^{-1} dans l'égalité de départ, on a $g = f^{-1} \circ h \circ f^{-1}$ qui est bijective comme composée de bijections.

20 - solution $f \circ g$ est bijective donc f est surjective et g est injective.
 $g \circ f$ est bijective donc g est surjective et f est injective. Bref, f et g sont bijectives.

21 - solution $\Leftarrow$ Supposons f injective. Montrons que f est surjective.

Soit $y \in E$. On a alors $f^n(y) = f(y)$, soit $f(f^{n-1}(y)) = f(y)$. Par injectivité de f , il vient $f^{n-1}(y) = y$, soit $y = f(f^{n-2}(y))$, puisque $n \geq 2$, et par conséquent y possède un antécédent par f dans E .

$\Rightarrow$ Supposons f surjective. Montrons que f est injective.

Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.

Comme f est surjective, il existe $t, t' \in E$ tels que $x = f(t)$ et $x' = f(t')$. La relation $f(x) = f(x')$ se traduit donc par $f^2(t) = f^2(t')$. Comme $n \geq 2$, on peut appliquer f^{n-2} de part et d'autre et il vient $f^n(t) = f^n(t')$, soit $f(t) = f(t')$ par hypothèse de l'énoncé, ce qui s'écrit encore $x = x'$. Donc f est injective.

22 - solution 1. Th de neutralisation : f est bijective **ssi** f est inversible à gauche et à droite.

2. Double implication.

$\Leftarrow$ $g \circ f = \text{Id}_E$ est injective donc f est injective.

$\Rightarrow$ Supposons f injective. Soit $y \in F$. Fixons $x_0 \in E$.

✧ S'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on pose $g(y) = x$ (ce x est bien unique par injectivité de f).

✧ Sinon, on pose $g(y) = x_0$.

On vérifie aisément que $g \circ f = \text{Id}_E$.

3. Double implication.

$\Leftarrow$ $f \circ g = \text{Id}_F$ est surjective donc f est surjective.

$\Rightarrow$ Supposons f surjective. Soit $y \in E$. On sait qu'il existe un (et peut-être plusieurs) élément(s) $x \in E$ tel(s) que $y = f(x)$. On choisit alors x_y l'un de ces éléments et on pose $g(y) = x_y$. On vérifie ainsi $f \circ g = \text{Id}_F$.
On a utilisé ici implicitement un résultat qui n'est pas si trivial : l'axiome du choix. En fait, on peut même prouver que l'énoncé de la question est équivalent à l'axiome du choix.

Axiome du choix : si E est un ensemble non vide, il existe une application $c : \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow E$ qui à toute partie non vide de E associe un élément de cette partie. Cette fonction est appelée fonction de choix.

Même si cet énoncé peut sembler évident, il est en fait quelque chose qu'on ne peut déduire de la construction de la théorie des ensembles classiques. Il est même possible de construire une théorie mathématique non contradictoire en posant un axiome contredisant l'axiome du choix...

23 - solution ➤ Sur $\mathbb{Z}$, elle n'est pas antisymétrique.

➤ Sur $\mathbb{N}$, c'est une relation d'ordre qui n'est pas totalement ordonnée. Justifions-le.

✧ Elle est clairement réflexive.

✧ Elle est antisymétrique. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, supposons que $n \mid m$ et $m \mid n$. Alors il existe $h, k \in \mathbb{N}$ tels que $m = hn$ et $n = km$. Donc $m = hkm$.

Si $m \neq 0$, on a donc $hk = 1$, et comme h et k sont entiers, on a $h = k = 1$, soit $m = n$.

Si $m = 0$, alors forcément $n = km = 0$, donc $m = n$.

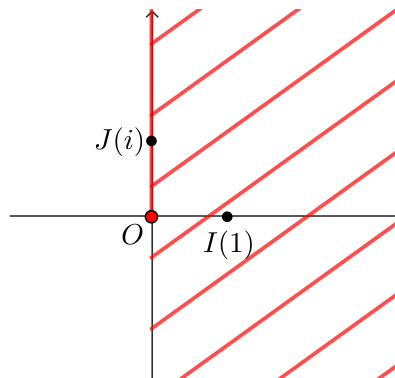
Dans les deux cas, on a donc $m = n$ ce qui prouve l'antisymétrie.

✧ Elle est clairement transitive.

✧ Elle n'est pas totale car $2 \nmid 5$ et $5 \nmid 2$.

24 - solution 1. $\text{Re}(-1 + i) = -1 < \text{Re}(0)$ donc $-1 + i \preccurlyeq 0$. Idem pour les deux autres.

2. P est la réunion du demi-plan complexe des nombres de partie réelle > 0 et de la demi-droite des imaginaires purs à partie imaginaire ≥ 0 .



3. On vérifie les trois points suivants.

- $\preccurlyeq$ est réflexive : si $z \in \mathbb{C}$, $z \preccurlyeq z$ puisque les parties réelles et imaginaires de chacun de ces deux termes sont égales.
- $\preccurlyeq$ est antisymétrique. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Supposons $z \preccurlyeq z'$ et $z' \preccurlyeq z$. On a donc :

$$\begin{cases} \text{Re}(z) < \text{Re}(z') \\ \text{ou} \\ \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) \leq \text{Im}(z') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Re}(z') < \text{Re}(z) \\ \text{ou} \\ \text{Re}(z') = \text{Re}(z) \text{ et } \text{Im}(z') \leq \text{Im}(z) \end{cases}$$

La première ligne du système est incompatible avec le second système. Et la première ligne du second est incompatible avec le premier. Donc on a forcément $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$, $\text{Im}(z) \leq \text{Im}(z')$ et $\text{Im}(z') \leq \text{Im}(z)$. Soit $z = z'$. Donc $\preccurlyeq$ est antisymétrique.

- $\preccurlyeq$ est transitive. Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$. Supposons $z \preccurlyeq z'$ et $z' \preccurlyeq z''$. Montrons que $z \preccurlyeq z''$. Il s'agit de démontrer une proposition s'écrivant avec le connecteur « ou », on suppose donc fausse l'assertion $\text{Re}(z) < \text{Re}(z'')$ et on prouve que nécessairement $\text{Re}(z) = \text{Re}(z'')$ et $\text{Im}(z) \leq \text{Im}(z'')$.
Concernant les parties réelles, on a donc supposé $\text{Re}(z) \leq \text{Re}(z') \leq \text{Re}(z'')$ d'une part et $\text{Re}(z'') \leq \text{Re}(z)$ d'autre part. Donc on a bien $\text{Re}(z) = \text{Re}(z'')$.
Concernant les parties imaginaires, comme toutes les inégalités sur les parties réelles sont des égalités, c'est que l'on est dans les « deuxièmes lignes » de chaque accolades, autrement dit on a précisément supposé $\text{Im}(z) \leq \text{Im}(z') \leq \text{Im}(z'')$.
On en conclut que $z \preccurlyeq z''$.

Ainsi, la relation $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Montrons qu'elle est totale.

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Supposons fausse l'assertion $z \preccurlyeq z'$ et montrons que l'on a alors nécessairement $z' \preccurlyeq z$.

On a donc supposé $\text{Re}(z') \leq \text{Re}(z)$ et $((\text{Re}(z) \neq \text{Re}(z')) \vee (\text{Im}(z') < \text{Im}(z)))$.

On doit montrer que $\text{Re}(z') < \text{Re}(z)$ ou $((\text{Re}(z') = \text{Re}(z)) \wedge (\text{Im}(z') \leq \text{Im}(z)))$.

À nouveau, on suppose fausse l'assertion $\text{Re}(z') < \text{Re}(z)$ et on montre que l'autre est nécessairement vraie.

Ayant déjà supposé $\text{Re}(z') \leq \text{Re}(z)$, c'est donc que $\text{Re}(z') = \text{Re}(z)$ et on a déjà montré une partie de ce que l'on souhaite prouver.

De plus, on a également supposé $((\text{Re}(z) \neq \text{Re}(z')) \vee (\text{Im}(z') < \text{Im}(z)))$, ce qui entraîne forcément $\text{Im}(z') < \text{Im}(z)$, d'où $\text{Im}(z') \leq \text{Im}(z)$!

Bref, on a bien $z' \preccurlyeq z$, et on en conclut que $z \preccurlyeq z'$ ou $z' \preccurlyeq z$, donc que la relation est totale.

4. Soient $z_1, z_2, z'_1, z'_2 \in \mathbb{C}$. Supposons $z_1 \preccurlyeq z'_1$ et $z_2 \preccurlyeq z'_2$.

On a clairement $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2)$ et $\text{Re}(z'_1 + z'_2) = \text{Re}(z'_1) + \text{Re}(z'_2)$. Disjonction de cas :

- si l'une (au moins) des inégalités $\text{Re}(z_1) \leq \text{Re}(z'_1)$ ou $\text{Re}(z_2) \leq \text{Re}(z'_2)$ est stricte, alors $\text{Re}(z_1 + z_2) < \text{Re}(z'_1 + z'_2)$ donc $z_1 + z_2 \preccurlyeq z'_1 + z'_2$;
- sinon, c'est que $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z'_1 + z'_2)$. Et comme $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z'_1)$ et $\text{Re}(z_2) = \text{Re}(z'_2)$, c'est que $\text{Im}(z_1) \leq \text{Im}(z'_1)$ et $\text{Im}(z_2) \leq \text{Im}(z'_2)$. Alors $\text{Im}(z_1 + z_2) \leq \text{Im}(z'_1 + z'_2)$ et on a bien prouvé aussi $z_1 + z_2 \preccurlyeq z'_1 + z'_2$.

5. $1 + 2i \in P \setminus \{0\}$ mais $(1 + 2i)^2 = -3 + 4i \notin P \setminus \{0\}$.

26 - solution

1. ➤ Bien ordonné : $(\mathbb{N}, \leq)$.

➤ Non bien ordonné : $(\mathbb{Z}, \leq)$.

2. Supposons $(E, \preccurlyeq)$ bien ordonné. Soient $x, y \in E$. Alors $\{x, y\}$ est une partie non vide de E , elle possède donc un plus petit élément. Si c'est x , alors $x \leq y$; si c'est y , alors $y \leq x$. Donc $(E, \preccurlyeq)$ est totalement ordonné.
3. $(\mathbb{Z}, \leq)$ est totalement ordonné mais pas bien ordonné.

26 - solution

Pas sur $\mathbb{N}^2$: la transitivité est mise en défaut, puisque $(1, 0) \mathcal{R} (0, 0)$ et $(0, 0) \mathcal{R} (0, 1)$, mais on n'a pas $(1, 0) \mathcal{R} (0, 1)$.

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, oui, RST...

27 - solution

1. RST.

2. Immédiat avec la définition de l'injectivité.

3. (a) $\bar{0} = \{0\}$ et si $x \neq 0$, $\bar{x} = \{-x, x\}$.

(b) À reprendre après le chapitre de trigonométrie. Si $x \equiv 0[\pi]$, $\bar{x} = \pi\mathbb{Z}$. Sinon, $\bar{x} = \{x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

4. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. $\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = a + b\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = a + b - x\}$: c'est une droite du plan (celle de pente -1 et d'ordonnée à l'origine $a + b$).

(b) $\overline{(0,0)} = \{(0,0)\}$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = a^2 + b^2\}$: c'est un cercle du plan (celui de centre $(0,0)$ et de rayon $a^2 + b^2$).

28 - solution

1. $\succsim$: RS, trivial. T : soient $f, g, h \in F$, supposons $f \sim g$ et $g \sim h$. Alors il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n_1} = g^{n_1}$ et $g^{n_2} = h^{n_2}$. Alors $f^{n_1+n_2} = (f^{n_1})^{n_2} = (g^{n_1})^{n_2} = g^{n_1+n_2} = (g^{n_2})^{n_1} = (h^{n_2})^{n_1} = h^{n_1+n_2}$. Donc $f \sim g$.
 - $\approx$: RS, trivial. T, de même : soient $f, g, h \in F$, supposons $f \approx g$ et $g \approx h$. Alors il existe $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n_1} = g^{m_1}$ et $g^{n_2} = h^{m_2}$. Alors $f^{n_1+n_2} = (f^{n_1})^{n_2} = (g^{m_1})^{n_2} = g^{m_1+n_2} = (g^{n_2})^{m_1} = (h^{m_2})^{m_1} = h^{m_1+m_2}$. Donc $f \approx g$.
2. (a) Soit $f \in F$: si $g \in f^\sim$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = g^n$ et en posant $m = n$, on a bien $f^n = g^m$ donc $g \in f^\approx$. Ainsi, $f^\sim \subset f^\approx$.
 (b) Soit $f \in F$.
 - $\succsim$ Si $g \in f^\sim$, $g^\sim \subset g^\approx$ selon 2.a; or, $g^\approx = f^\approx$. donc $g^\sim \subset f^\approx$.
 - $\approx$ Les classes d'équivalence pour $\sim$ forment une partition de F donc il existe un ensemble I et une famille de fonction $(g_i)_{i \in I}$ tels que $F = \bigcup_{i \in I} g_i$. En notant $J = \{i \in I, g_i \in f^\approx\}$, on a alors $f^\approx = \bigcup_{i \in J} g_i$.
- (c) Soit $f \in F$.
 - $\succsim$ Supposons qu'il existe g , injective, dans $f^\approx$. Il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^n = g^m$. Par composition, g^m est injective, donc $f^n = f^{n-1} \circ f$ est injective donc f est injective.
 - $\approx$ Idem pour la surjectivité.