

Logique

1 ☆☆☆

S'il pleut, Abel prend un parapluie. Béatrice ne prend jamais de parapluie s'il ne pleut pas et en prend toujours un quand il pleut.

Que peut-on déduire de ces affirmations dans les différentes situations ci-dessous ?

1. Abel se promène avec un parapluie.
2. Abel se promène sans parapluie.
3. Béatrice se promène avec un parapluie.
4. Béatrice se promène sans parapluie.
5. Il ne pleut pas.
6. Il pleut.

2 ☆☆☆ ♥

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Traduire formellement les assertions suivantes (sans utiliser les congruences) :

1. n est pair ;
2. n est impair ;
3. n est multiple de 3 ;
4. n n'est pas multiple de 3.

3 ★☆☆ ♥

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Traduire formellement les assertions suivantes et leur négation :

1. f est paire ;
2. f est impaire ;
3. f prend au moins une fois la valeur 6 ;
4. f s'annule au plus une fois.

4 ★★☆☆ ♥

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $x_1, \dots, x_n$ des réels. Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $x_1 = x_2 = x_3$;
2. les x_i , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont tous nuls ;
3. les x_i , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont tous non nuls ;
4. les x_i , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont tous distincts ;
5. les valeurs des x_i , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont exactement celles de $\llbracket 1, n \rrbracket$;
6. tous les aixois qui ont les yeux bleus gagneront au loto et s'achèteront un voilier.

5 ★☆☆ ♥

$\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}, (2x^2 + 2x\sqrt{2} \leq 3 \implies |x| \leq 3)$.

1. Donner la négation de $\mathcal{P}$.
2. Donner la contraposée de $\mathcal{P}$.
3. Prouver $\mathcal{P}$.

6 ★★☆☆

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère l'assertion :

$\mathcal{P}(x) : \forall y \in [0, 1], (x \geq y \implies x \geq 2y)$.

1. Notons $\mathcal{P}$ la proposition suivante : $\exists x \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(x)$.
Négation ? Contraposée ? Vraie ou fausse ?
2. Trouver tous les réels x vérifiant $\mathcal{P}(x)$.

7 ☆☆☆

Sur la route, on peut parfois lire des messages concernant la sécurité routière sur les panneaux lumineux de signalisation, comme par exemple :

- « ceinture attachée = sécurité » ;
- « en hiver, pneus neige = sécurité » ;
- « respectez les distances de sécurité : une bande = danger, deux bandes = sécurité ».

Il est alors difficile de savoir ce que signifie la « sécurité »... Est-on en sécurité si l'on a attaché sa ceinture mais que l'on roule à 120 km/h en zone urbaine ? Proposer une réécriture mathématique de ces messages.

8 ★★☆☆

1. Combien existe-t-il de connecteurs logiques, reliant deux assertions, différents ?
2. Peut-on tous les écrire avec les connecteurs logiques élémentaires : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\implies$, $\iff$?
3. Peut-on tous les écrire avec les connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$?
4. Peut-on tous les écrire avec les connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$?
5. Peut-on tous les écrire avec les connecteurs logiques $\neg$, $\vee$?
6. Existe-t-il un connecteur « universel », c'est-à-dire qui permette d'écrire tous les autres ?

Ensembles

9 ★☆☆☆ ♥

Montrer que $\{z \in \mathbb{R}, \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x^2 - y^2\} = \mathbb{R}$.

10 ☆☆☆ ♥

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E telles que $A \cup C = B \cup C$ et $A \cap C = B \cap C$. Montrer que $A = B$.

11 ☆☆☆

Pour toutes parties A , B et C d'un ensemble E , montrer : $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

12 ★★☆☆ ➦ Différence symétrique

Soit E un ensemble. Pour tous $A, B \subset E$, on définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Trouver une partie X de E telle que $\forall C \in \mathcal{P}(E), C \Delta X = C$.
2. Montrer les égalités :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

3. Montrer que, pour tout $C \in \mathcal{P}(E)$, $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
4. Montrer l'associativité, pour tous $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

13 ★☆☆☆ ♥

Soient A , B , C , D quatre parties d'une ensemble E . On considère les assertions suivantes :

$$\mathcal{P}_1 : (A \cap B) \times (C \cap D) \subset (A \times C) \cap (B \times D);$$

$$\mathcal{P}_2 : (A \cap B) \times (C \cap D) \supset (A \times C) \cap (B \times D);$$

$$\mathcal{P}_3 : (A \cup B) \times (C \cup D) \subset (A \times C) \cup (B \times D);$$

$$\mathcal{P}_4 : (A \cup B) \times (C \cup D) \supset (A \times C) \cup (B \times D).$$

1. Identifier les assertions vraies lorsque $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$ et $D = \{3, 4\}$.
2. Identifier les assertions vraies dans le cas général.

Différents types de raisonnements

14 ☆☆☆ ♥

Montrer qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif.

15 ★☆☆ ☆ ⊕ ♥

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n^2 - 1$ n'est pas multiple (entier) de 8, alors n est pair.

16 ★☆☆ ♥

Montrer que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel.

17 ★☆☆ ⊕

Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{cases} a^2 - b = 133 \\ b^2 - a = 133 \end{cases}$.

18 ★★★ ⊕

On pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Il n'est pas si aisé de répondre à la question : « a est-il rationnel ou irrationnel », et on ne cherchera pas à y répondre.

En considérant ces deux cas possibles, montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $x^y \in \mathbb{Q}$.

Le raisonnement par récurrence

19 ☆☆☆ ♥ (trivial avec les congruences)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est multiple de 11.

20 ☆☆☆ (trivial avec les congruences)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 2$ est multiple de 3.

21 ★☆☆ ♥

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

22 ★☆☆ ⊕

Montrer que la somme des angles d'un polygône non croisé à n côtés ($n \geq 3$) vaut $(n - 2)\pi$.

23 ☆☆☆ ♥

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

24 ★☆☆ ⊕

Soit p un entier impair. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 2^{n+2} divise $p^{2^n} - 1$.

25 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, E un ensemble et $E_1, \dots, E_n$ des parties distinctes deux à deux de E . Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que E_i ne contient aucun des E_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$.

26 ☆☆☆ ♥

Calculer la somme des n premiers entiers naturels impairs, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

27 ★☆☆ ♥

Pour quels entiers naturels n a-t-on $2^n > n^2$?

28 ★★★ ♥ Une récurrence finie

Soit P un polynôme à coefficients réels tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x + 2025)P(x) = xP(x + 1)$.

Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, 2024 \rrbracket$, $P(-k) = 0$.

29 ☆☆☆

On pose $u_0 = \frac{1}{4}$, $u_1 = \frac{7}{8}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}}{2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

30 ★☆☆ ♥ ♥ Suite de Fibonacci

On pose $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{R}^+$. En déduire que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. Montrer : $\forall n \geq 3$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \leq F_n \leq 2^{n-2}$. En déduire que la suite (F_n) tend vers $+\infty$.

3. Notons $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi^{-1})^n}{\sqrt{5}}$. En déduire que $\frac{F_n}{\varphi^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}$.

31 ★★★

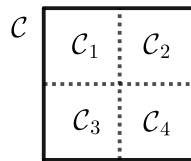
On pose $a_0 = a_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

32 ★★☆☆ ⊕

On considère un carré $\mathcal{C}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que l'on *partage* $\mathcal{C}$ en n carrés lorsqu'on peut trouver n carrés (différents) inclus dans l'intérieur de $\mathcal{C}$ et dont les bords recouvrent (au moins) tous les bords du carré $\mathcal{C}$.

Ci-contre, on a partagé le carré $\mathcal{C}$ en quatre carrés.



1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si l'on peut partager le carré $\mathcal{C}$ en n carrés, alors on peut le partager en $n + 3$ carrés.
2. Justifier que l'on peut partager le carré $\mathcal{C}$ en six, sept et huit carrés.
3. Identifier toutes les valeurs de n pour lesquelles on peut partager le carré $\mathcal{C}$ en n carrés.

33 ★☆☆☆ ♥

On note $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} 2u_{n/2} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ u_{n-1} + 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Expliciter u_n .

34 ★☆☆☆ ♥

Montrer que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.

35 ★★☆☆ Existence de l'écriture binaire

Montrer que tout entier naturel non nul s'écrit comme somme de puissances entières naturelles de deux, deux à deux distinctes.

Indications

5 - indication 3. Prouver l'implication directe en observant que l'inéquation $2x^2 + 2x\sqrt{2} \leq 3$ est polynomiale du second degré; ou prouver la contraposée par somme et produit sur les inégalités.

9 - indication Double inclusion.

13 - indication 2. Prouver les inclusions observées comme vraies comme dans l'exemple.

14 - indication Raisonnement par l'absurde.

15 - indication Raisonnement par contraposée.

17 - indication Raisonner par analyse-synthèse et faire la différence des deux relations.

18 - indication Étudier les deux cas $a \in \mathbb{Q}$ et $a \notin \mathbb{Q}$.

22 - indication Hérité : relier deux côtés consécutifs du polygone de manière à former un triangle.

24 - indication Observer une identité remarquable sur $p^{2^{n+1}} - 1$.

27 - indication Conjecturer jusqu'au rang 6 au moins.

28 - indication Récurrence finie. Bien réfléchir pour le choix de k lors de l'hérité.

29 - indication Récurrence double.

30 - indication Trois récurrences doubles.

31 - indication Récurrence double. Hérité : étudier le signe de la différence $a_{n+1} - (n+1)^2$.

32 - indication 3. Montrer que l'on peut partager $\mathcal{C}$ en n carrés dès que $n \geq 6$ par récurrence *triple*.

33 - indication Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$. Récurrence forte.

34 - indication Récurrence forte. Hérité : distinguer le fait que $n+1$ soit premier ou non.

35 - indication Récurrence forte. Hérité : distinguer le fait que $n+1$ est pair ou non.

Solutions

1 - solution $\mathcal{P}$: il pleut, $\mathcal{Q}$: Abel a un parapluie, $\mathcal{R}$: Béatrice a un parapluie.

Énoncé : $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{R}$.

1. / 2. Il ne pleut pas. 3. Il pleut. 4. Il ne pleut pas. 5. Béatrice se promène sans parapluie. 6. Abel et Béatrice ont leur parapluie.

2 - solution On peut évidemment traduire toutes ces propositions avec le symbole $\equiv$ de congruence, mais l'objectif ici est plutôt de manipuler les quantificateurs.

1. $\exists p \in \mathbb{Z}, n = 2p$.
2. $\exists p \in \mathbb{Z}, n = 2p + 1$.
3. $\exists p \in \mathbb{Z}, n = 3p$.
4. Deux points de vue :
 - $\forall p \in \mathbb{Z}, n \neq 3p$.
 - $\exists p \in \mathbb{Z}, (n = 3p + 1 \text{ ou } n = 3p + 2)$.

3 - solution 1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 6$.
4. Deux points de vue :
 - $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0) \text{ ou } (\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$.
 - $\forall x, y \in \mathbb{R}, (f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow x = y)$.

4 - solution 1. $x_1 \neq x_2$ ou $x_1 \neq x_3$. Remarque : on peut rajouter, mais c'est inutile, « ou $x_2 \neq x_3$. »

2. Au moins un des x_i n'est pas nul.
3. Au moins un des x_i est nul.
4. Au moins deux des x_i sont égaux.
5. Il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_i \notin \llbracket 1, n \rrbracket$ ou $i \notin \{x_k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. (Le deuxième suffit, cf. bijection).
6. Au moins un aixois aux yeux bleus ne gagnera pas au loto ou ne s'achètera pas un voilier.

5 - solution 1. Négation. $\exists x \in \mathbb{R}, (2x^2 + 2x\sqrt{2} \leq 3 \text{ et } |x| > 3)$.

2. Contraposée. $\forall x \in \mathbb{R}, (|x| > 3 \Rightarrow 2x^2 + 2x\sqrt{2} > 3)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

➤ **M1** Démontrons l'implication directe.

Supposons $2x^2 + 2x\sqrt{2} \leq 3$. Le polynôme $2X^2 + 2X\sqrt{2} - 3$ admet pour racine $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc on a $-\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or, $-3 \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 3$, donc $-3 \leq x \leq 3$. Ce qui se réécrit $|x| \leq 3$.

➤ **M2** Démontrons la contraposée.

Supposons $|x| > 3$ et montrons que $2x^2 + 2x\sqrt{3} > 3$. Pour cela, distinguons deux cas.

✧ Supposons $x > 3$. Alors $2x^2 = 18 > 3$ et $2x\sqrt{3} \geq 0$. Par sommation membre à membre d'inégalités, $2x^2 + 2x\sqrt{3} > 3$.

✧ Supposons $x < -3$. On réécrit $2x^2 + 2x\sqrt{3} = 2x(x + \sqrt{3})$. Comme $x < -3$, $x + \sqrt{3} < -1$. Et comme $x < 0$, $x(x + \sqrt{3}) > -x$. Ainsi, $2x(x + \sqrt{3}) > -2x$, soit $2x(x + \sqrt{3}) > 6$. *A fortiori*, $2x^2 + 2x\sqrt{3} > 3$.

Dans les deux cas, on a prouvé que $2x^2 + 2x\sqrt{3} > 3$.

Avec n'importe laquelle des deux méthodes, on a démontré l'implication $(2x^2 + 2x\sqrt{2} \leq 3 \Rightarrow |x| \leq 3)$, et ceci, pour tout $x \in \mathbb{R}$ quelconque, ce qui démontre $\mathcal{P}$.

6 - solution 1. Négation. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in [0, 1], (x \geq y \text{ et } x < 2y)$.

Contraposée. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in [0, 1], (x < 2y \Rightarrow x < y)$.

La proposition initiale est vraie puisque $\mathcal{P}(2)$ est vraie. Démontrons-le.

Soit $y \in [0, 1]$. La proposition $(y \leq 2 \Rightarrow 2y \leq 2)$ est forcément vérifiée puisque les deux propositions sont manifestement satisfaites.

2. Disjonction de cas.

- Si $x \geq 2$, le même argument que précédemment permet de voir que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- Si $x \leq 0$, idem.
- Soit $x \in]0, 1]$. Choix : $y = x \in [0, 1]$. La proposition $x \geq y$ est vraie mais pas la proposition $x \geq 2y$, car $x \neq 0$. Donc l'implication pour ce y est fausse donc $\mathcal{P}(x)$ est fausse.
- Soit $x \in]1, 2[$. Choix : $y = \frac{2+x}{4} \in [0, 1]$ (de manière à ce que $2y$ soit le milieu de $[x, 2]$). La proposition $x \geq y$ est vraie mais pas la proposition $x \geq 2y$. Donc $\mathcal{P}(x)$ est fausse.

Finalement, $\mathcal{P}(x)$ est vraie **ssi** $x \in \mathbb{R} \setminus]0, 2[$.

7 - solution ➤ Sécurité $\implies$ ceinture attachée.

- Première possibilité : hiver $\implies$ (sécurité $\implies$ pneus neige).
- Deuxième possibilité : (hiver et sécurité) $\implies$ pneus neige.
- Sécurité $\implies$ au moins deux bandes (l'autre est sa contraposée).

8 - solution 1. Considérons un tel connecteur logique. On peut donc faire sa table de vérité. Sur chaque ligne (V/V puis $V/F...$), on a deux possibilités : soit V , soit F . Par principe multiplicatif (voir le chapitre de dénombrement), on a en tout $2^4 = 16$ possibilités. Il y a donc 16 connecteurs logiques différents.

2. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux assertions. On a les connecteurs « triviaux » et leurs négations :
 - V (connecteur qui renvoie toujours V et qui peut s'écrire $\mathcal{R} \vee \overline{\mathcal{R}}$) et F (connecteur qui renvoie toujours F et qui peut s'écrire $\mathcal{R} \wedge \overline{\mathcal{R}}$);
 - $\mathcal{R}$ ($\equiv \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}$) et $\overline{\mathcal{R}}$;
 - $\mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{S}}$.

On a ensuite les connecteurs logiques élémentaires et leurs négations :

- $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}} (\equiv \overline{\mathcal{R}} \vee \overline{\mathcal{S}}$ d'après les lois de Morgan;
- $\mathcal{R} \vee \mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{R} \vee \mathcal{S}} (\equiv \overline{\mathcal{R}} \wedge \overline{\mathcal{S}}$ d'après les lois de Morgan;
- $\mathcal{R} \implies \mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{R} \implies \mathcal{S}} (\equiv \mathcal{R} \wedge \overline{\mathcal{S}})$;
- $\mathcal{R} \iff \mathcal{S} (\equiv \mathcal{R} \vee \overline{\mathcal{S}} \vee \overline{\mathcal{R}} \vee \mathcal{S})$ et $\overline{\mathcal{R} \iff \mathcal{S}} (\equiv \overline{\mathcal{R}} \wedge \mathcal{S})$;
- $\mathcal{R} \iff \mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{R} \iff \mathcal{S}} (\equiv \mathcal{R} \iff \overline{\mathcal{S}})$.

Et ça en fait 16!

3. Comme les connecteurs $\implies$ et $\iff$ (et $\iff$) s'écrivent à l'aide de $\neg$, $\wedge$ et $\vee$, la réponse est oui.
4. Il suffit de savoir si on peut exprimer le connecteur $\vee$ à l'aide uniquement de $\neg$ et $\wedge$ (puisqu'il suffira alors de remplacer dans les expressions précédentes les occurrences de $\vee$ par cette expression). Or, grâce aux lois de Morgan, on peut constater : $\overline{\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}} \equiv \mathcal{R} \vee \mathcal{S}$. La réponse est donc oui.
5. On peut intervertir les $\wedge$ et les $\vee$ dans la question précédente, donc la réponse est oui.
6. Oui, l'opérateur $\uparrow$ défini par $\mathcal{R} \uparrow \mathcal{S} \equiv \overline{\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}}$.
En effet, selon la question 4, il suffit de voir que les opérateurs $\neg$ et $\wedge$ s'écrivent en fonction de $\uparrow$. Or, on peut vérifier :
 - $(\mathcal{R} \uparrow \mathcal{R}) \equiv \neg \mathcal{R}$;
 - $(\mathcal{R} \uparrow \mathcal{S}) \uparrow (\mathcal{R} \uparrow \mathcal{S}) \equiv \mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$.

9 - solution Procédons par double inclusion.

- L'inclusion $A \subset \mathbb{R}$ est triviale.
- Montrons que $\mathbb{R} \subset A$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $t \in A$. Par disjonction de cas.
 - ✧ Si $t \in \mathbb{R}^+$, en notant $x = \sqrt{t}$, on a $t = x^2 - 0^2 \in A$.
 - ✧ Si $t \in \mathbb{R}^-$, en notant $x = \sqrt{-t}$, on a $t = 0^2 - x^2 \in A$.

Dans tous les cas, on a prouvé que $t \in A$. Ainsi, $\mathbb{R} \subset A$.

On en conclut que $A = \mathbb{R}$.

10 - solution Soit $x \in A$. $x \in A \cup C = B \cup C$. Supposons par l'absurde que $x \notin B$: alors $x \in C$. Donc $x \in A \cap C = B \cap C$ donc $x \in B$!

11 - solution Soient A , B et C trois parties de E . Avec les lois de Morgan :

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B \cup C} = A \setminus (B \cup C).$$

12 - solution

 1. $X = \emptyset$.

 2. La 2-ème égalité est triviale puisque $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

 Puis : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cap (\overline{A \cap B})) \cup (B \cap (\overline{A \cap B})) = (A \cap \overline{B}) \cup B \cap \overline{A}$.

 3. Soit $C \in \mathcal{P}(E)$.

$$\triangleright A \cap (B \Delta C) = A \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C).$$

$$\triangleright (A \cap B) \Delta (A \cap C) = (A \cap B \cap (\overline{A \cap C})) \cup ((A \cap B) \cap A \cap C). \text{ Or :}$$

$$\diamond A \cap B \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C};$$

$$\diamond \text{ en intervertissant les rôles de } B \text{ et } C, (\overline{A \cap B}) \cap A \cap C = A \cap \overline{B} \cap C.$$

 D'où l'égalité $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

 4. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrons que $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

 En utilisant la deuxième égalité de la question 2, on obtient que les deux quantités sont égales au même ensemble : $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A \cap B} \cap C) \cup (\overline{A \cap B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$. Ce qui conclut la question.

13 - solution

$$1. \triangleright (A \cap B) \times (C \cap D) = \{(1, 3)\} = (A \times C) \cap (B \times D).$$

$$\triangleright (A \cup B) \times (C \cup D) = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}.$$

$$\triangleright (A \times C) \cup (B \times D) = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}.$$

 Vraies : $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_4$.

 2. $\triangleright$ Prouvons $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ directement par équivalences successives. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) &\iff x \in A \cap B \text{ et } y \in C \cap D \\ &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } (y \in C \text{ et } y \in D) \\ &\iff (x \in A \text{ et } y \in C) \text{ et } (x \in B \text{ et } y \in D) \quad \text{par associativité,} \\ &\iff (x, y) \in A \times C \text{ et } (x, y) \in B \times D \\ &\iff (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D). \end{aligned}$$

 $\triangleright \mathcal{P}_3$ est fausse en vertu du contre-exemple précédent.

 $\triangleright$ Montrons $\mathcal{P}_4$. Soit $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$. On a donc $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times D$. Disjonction de cas.

 $\diamond$ Si $(x, y) \in A \times C$, alors $x \in A \subset A \cup B$ et $y \in C \subset C \cup D$. Donc $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$.

 $\diamond$ Sinon, on a forcément $(x, y) \in B \times D$. Et on refait de même : $x \in B \subset A \cup B$ et $y \in D \subset C \cup D$, donc $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$.

 Dans tous les cas, on a bien prouvé que $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$.

14 - solution

 Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel $x > 0$ plus petit que tous les autres réels strictement positifs. Or, $\frac{x}{2}$ est encore un réel strictement positif, et $\frac{x}{2} < x$, ce qui est absurde.

Remarque. Notons que ce raisonnement permet de voir qu'il n'existe pas non plus de plus petit rationnel strictement positif.

15 - solution

 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

 On raisonne par contraposée en montrant que si n est impair, alors $n^2 - 1$ est multiple par 8.

 Supposons donc que n est impair, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Alors $n^2 - 1 = 4p(p + 1)$. Comme $p(p + 1)$ est nécessairement pair, $n^2 - 1$ est multiple de 8.

On a donc bien prouvé, par contraposée, la proposition désirée.

16 - solution

 Par l'absurde. Supposons qu'il existe $(p; q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{p}{q}$. Alors $q \ln(3) = p \ln(2)$, puis $\ln(3^q) = \ln(2^p)$ et $3^q = 2^p$. Or, 3^q n'est pas pair... Absurde.

17 - solution

 Analyse. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un couple solution. Par différence membre à membre, il vient $(a^2 - b^2) + (a - b) = 0$, soit $(a - b)(a + b + 1) = 0$. De fait, on a forcément $b = a$ ou $b = -1 - a$.

 $\triangleright$ Si $b = a$, le système devient $a(a - 1) = 133$. Or, $a(a - 1)$ est forcément pair (classique : c'est le produit de deux entiers consécutifs), donc il n'y a pas de solutions dans ce cas.

 $\triangleright$ Si $b = -1 - a$, la première ligne du système devient $a(a + 1) = 132$. Là, deux stratégies :

 $\diamond$ utiliser le fait que $132 = 11 \times 12$ et invoquer le lemme de Gauss... Cf. Chapitre arithmétique.

◇ ou, plus astucieusement, factoriser l'expression polynomiale : $a^2 + a - 132 = (a - 11)(a + 12)$. De sorte que $a = 11$ ou $a = -12$.

Dans le cas où $b = -1 - a$, les seuls couples possibles sont donc $(11, -12)$ et $(-12, 11)$.

Synthèse. On vérifie aisément que ces couples sont solutions.

Conclusion : les solutions du système sont $(11, -12)$ et $(-12, 11)$.

18 - solution On sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

➤ Si a est rationnel, alors en posant $x = y = \sqrt{2}$, on a bien deux irrationnels tels que x^y est rationnel.

➤ Sinon, c'est que a est irrationnel et on pose $x = a$ et $y = \sqrt{2}$. Alors $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

On a donc trouvé, dans chacun des deux cas, $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $x^y \in \mathbb{Q}$.

19 - solution ➤ Avec les congruences, cet exercice est trivial.

En effet, soit $n \in \mathbb{N}$: on sait que $10 \equiv -1 \pmod{11}$ donc, par propriété de multiplicativité des congruences entières : $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$, ce qui signifie exactement que $10^n - (-1)^n$ est multiple de 11.

➤ Proposons une solution sans recours aux propriétés des congruences sur les entiers, afin de travailler le procédé de récurrence.

◇ Initialisation. Immédiate.

◇ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^n - (-1)^n = 11k$.

Alors $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 10((-1)^n + 11k) + (-1)^n = 10 \cdot (-1)^n + (-1)^n + 11 \cdot 10 \cdot k = 11((-1)^n + 10k)$ donc $10^{n+1} - (-1)^{n+1}$ est bien multiple de 11.

Ainsi, on a bien prouvé la propriété par récurrence.

20 - solution ➤ Avec les congruences, cet exercice est trivial.

En effet, soit $n \in \mathbb{N}$: on sait que $4 \equiv 1 \pmod{3}$ donc, par propriété de multiplicativité des congruences entières : $4^n \equiv 1 \pmod{3}$, puis $4^n + 2 \equiv 3 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$, ce qui signifie exactement que $4^n + 2$ est multiple de 3.

➤ Proposons une solution sans recours aux propriétés des congruences sur les entiers, afin de travailler le procédé de récurrence.

◇ Initialisation. Immédiat pour $n = 0$.

◇ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $4^n + 2$ est divisible par 3, c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n + 2 = 3m$. Alors $4^{n+1} + 2 = 4 \times 4^n + 2 = 4(3m - 2) + 2 = 3(4m - 2)$ est multiple de 3.

D'où le résultat.

21 - solution Initialisation. $n = 1$: évident.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

$1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

Or, $\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{n(n+1)^2} \geq 0$.

22 - solution Le résultat est connu pour $n = 3$. Soit $n \geq 3$. On suppose que la somme des angles de n'importe quel polygone non croisé à n côtés vaut $(n - 2)\pi$. Soit P un polygone non croisé à $n + 1$ côtés, $d(P)$ la somme de ses angles. On relie les extrémités de deux côtés consécutifs de P de manière à former un polygone P' non croisé à n côtés et un triangle T . Il est clair que $d(P) = d(P') + d(T) = (n - 2)\pi + \pi = (n - 1)\pi$.

23 - solution Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Initialisation. Immédiat pour $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Alors $(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$.

24 - solution Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k + 1$.

Initialisation. Pour $n = 1$, $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$ est bien multiple de $8 = 2^{1+2}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $p^{2^n} - 1 = 2^{n+2}q$. Alors $p^{2^{n+1}} - 1 = (p^{2^n} - 1)(p^{2^n} + 1)$.

Or, $p^{2^n} - 1$ multiple de 2^{n+2} et $p^{2^n} + 1$ est pair...

25 - solution Récurrence sur $n \geq 2$, notons $\mathcal{P}_n : \forall E_1, \dots, E_n \subset E$ deux à deux distinctes, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que E_i ne contienne aucun autre.

➤ Pour $n = 2$, c'est évident.

➤ Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Soient $E_1, \dots, E_n, E_{n+1} \subset E$ deux à deux distinctes. Selon $\mathcal{P}_n$, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que E_i ne contienne aucun des E_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$. Or, E_i et E_{n+1} sont distincts donc on a forcément $E_i \not\subset E_{n+1}$ ou $E_{n+1} \not\subset E_i$.

✧ Si $E_{n+1} \not\subset E_i$, on a évidemment E_i qui ne contient aucun des E_k pour $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{i\}$, donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

✧ Sinon, on a donc $E_{n+1} \subset E_i$ et $E_i \not\subset E_{n+1}$, donc E_{n+1} ne contient ni E_i , ni aucun des E_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ puisqu'il est contenu dans un ensemble qui ne contient aucun de ces ensembles... Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est prouvée.

26 - solution Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme des n premiers naturels impairs.

Notons que l'on peut calculer cette somme très simplement avec le symbole somme, et c'est un exercice d'un chapitre ultérieur.

Ici, on procède par récurrence.

Observation : $S_0 = 0$, $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 3 = 4$, $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$. Conjecture : $S_n = n^2$.

➤ *Initialisation.* Justifiée lors de l'observation.

➤ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $S_n = n^2$. Le $(n+1)$ -ème naturel impair est $2n+1$ (le premier, c'est $2 \times 0 + 1$; le deuxième, c'est $2 \times 1 + 1 \dots$), de sorte que $S_{n+1} = S_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

D'où le résultat par récurrence.

27 - solution $n \in \{0; 1\} \cup \{n \in \mathbb{N}; n \geq 5\}$.

28 - solution Récurrence finie.

Initialisation. En évaluant la relation de l'énoncé en $x = 0$, on a $2025P(0) = 0$, donc $P(0) = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \llbracket 0, 2023 \rrbracket$. On suppose que $P(-n) = 0$. En évaluant la relation de l'énoncé en $x = -n - 1$, on a $(2024 - n)P(-n - 1) = 0$. Or, $2024 - n \neq 0$, donc $P(-(n+1)) = 0$.

29 - solution *Initialisation.* Évident pour $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 < u_n < 1$ et $0 < u_{n+1} < 1$. Par croissance de la fonction racine carrée, $0 < \sqrt{u_n} < 1$ et $0 < \sqrt{u_{n+1}} < 1$. Donc $0 < \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} < 2$, d'où $0 < u_{n+2} < 1$.

30 - solution 1. On propose de raisonner par récurrence double.

➤ *Initialisation.* Il est clair que $F_0 \geq 0$ et $F_1 \geq 0$.

➤ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $F_n \geq 0$ et $F_{n+1} \geq 0$. Alors, en tant que somme de deux réels positifs ou nuls, on a immédiatement $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geq 0$.

On conclut, par procédé de récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq 0$.

Ensuite, $F_1 \geq F_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geq 0$, donc $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. Récurrence double. On note que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$.

➤ *Initialisation.* On vérifie aisément que $\frac{3}{2} \leq F_3 \leq 2$ et $\frac{9}{4} \leq F_4 \leq 4$.

➤ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Supposons $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \leq F_n \leq 2^{n-2}$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq F_{n+1} \leq 2^{n-1}$.

Par sommation membre à membre de ces encadrements, on a $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq F_n + F_{n+1} \leq 2^{n-2} + 2^{n-1}$. Or :

$$\diamond \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{10}{9} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n;$$

$$\diamond 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^{n-2}(1 + 2) = 3 \cdot 2^{n-2} \leq 4 \cdot 2^{n-2} \leq 2^n.$$

D'où l'encadrement $\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq F_{n+2} \leq 2^n$.

Le procédé de récurrence double permet d'établir que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \leq F_n \leq 2^{n-2}$.

Comme $\frac{3}{2} > 1$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Par théorème de minoration, $F_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

3. Récurrence double. Notons $\mathcal{P}(n) : F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-\varphi^{-1})^n)$.

➤ *Initialisation.* On vérifie aisément $\mathcal{P}(0)$ puisque $\varphi^0 = (-\varphi^{-1})^0 = 1$.

Et on vérifie aussi $\mathcal{P}(1)$ puisque $(-\varphi)^{-1} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, et donc on a bien :

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - (-\varphi^{-1})^1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 = F_1.$$

➤ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. Alors :

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^{n+1} - (-\varphi^{-1})^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-\varphi^{-1})^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n(\varphi + 1) - (-\varphi^{-1})^n(-\varphi^{-1} + 1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^{n+2} - (-\varphi^{-1})^{n+2}) \end{aligned}$$

$$\text{car } \varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \varphi + 1 \text{ et } (-\varphi^{-1})^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = 1 - \varphi^{-1}.$$

L'hérédité est donc prouvée.

Le procédé de récurrence double permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-\varphi^{-1})^n)$.

On en déduit $\frac{F_n}{\varphi^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}\varphi^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}$ par opérations algébriques, car $\varphi > 1$.

31 - solution Récurrence double.

Initialisation. $1 \leq a_1 = 1 \leq 1^2$. $1 \leq a_2 = 2 \leq 2^2$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On suppose que $1 \leq a_{n-1} \leq (n-1)^2$ et $1 \leq a_n \leq n^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{➤ } a_{n+1} &= a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \geq 1 + \frac{2}{n+1} \geq 1; \\ \text{➤ } a_{n+1} &= a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \leq n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2. \end{aligned}$$

On étudie le signe de la différence :

$$a_{n+1} - (n+1)^2 \leq \frac{n^2(n+1) + 2(n-1)^2 - (n+1)^3}{n+1} \leq \frac{-7n+1}{n+1}.$$

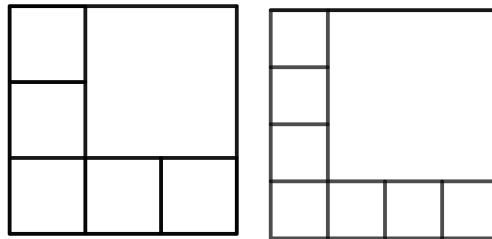
Comme $n \geq 1$, $7n \geq 7 \geq 1$, donc $-7n+1 \leq 0$ ce qui prouve que $a_{n+1} - (n+1)^2 \leq 0$.

On en déduit que $a_{n+1} \leq (n+1)^2$.

32 - solution

1. Partager l'un des carrés en quatre carrés comme dans l'énoncé.

2. Pour le partage en sept carrés, on applique la question 1 au partage en quatre carrés proposé dans l'énoncé. Pour les deux autres, une figure plutôt qu'un long discours.



3. ➤ On a vu en introduction que l'on pouvait partager $\mathcal{C}$ en quatre carrés et il est évident que l'on peut partager $\mathcal{C}$ en un carré.

➤ Montrons par récurrence triple que l'on peut partager $\mathcal{C}$ en n carrés, pour tout $n \geq 6$.

✧ *Initialisation.* C'est l'objet de la question 2.

✧ *Hérédité.* Soit $n \geq 6$. Supposons que l'on puisse partager $\mathcal{C}$ en n , $n+1$ et $n+2$ carrés. Alors, selon la question 1, on peut le partager en $n+3$ carrés.

➤ On ne peut pas partager $\mathcal{C}$ en deux carrés. Supposons, par l'absurde, que l'on puisse trouver un tel partage. Les quatre coins de $\mathcal{C}$ doivent nécessairement être des coins d'un des deux carrés, donc au moins un des deux carrés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ contient deux des coins de $\mathcal{C}$, et il est alors forcément confondu avec $\mathcal{C}$. De fait, l'autre carré est aussi confondu avec $\mathcal{C}$ et les deux carrés sont alors identiques, ce qui est exclu dans l'énoncé.

➤ Le même argument permet de voir que l'on ne peut pas partager $\mathcal{C}$ en trois ou cinq carrés (c'est immédiat pour trois, beaucoup moins pour cinq...).

En conclusion, on peut partager le carré en n carrés **ssi** $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{2, 3, 5\}$.

33 - solution Montrons par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$.

➤ *Initialisation.* Par définition, on a $u_0 = 0$.

➤ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, u_k = k$. Montrons que $u_{n+1} = n+1$.

- ◇ Si $n+1$ est impair, alors $u_{n+1} = u_n + 1$, donc par hypothèse de récurrence au rang $n \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $u_{n+1} = n+1$.
- ◇ Si $n+1$ est pair, alors $u_{n+1} = 2u_{\frac{n+1}{2}}$. De plus, $\frac{n+1}{2}$ est un entier (puisque $n+1$ est pair) de $\llbracket 0; n \rrbracket$ (car $n \geq 0$ donc $0 < \frac{n+1}{2} < n+1$) donc, d'après l'hypothèse de récurrence au rang $\frac{n+1}{2}$, $u_{\frac{n+1}{2}} = \frac{n+1}{2}$ d'où $u_{n+1} = n+1$.

Dans les deux cas, on a prouvé que $u_{n+1} = n+1$.

On en conclut, par principe de récurrence forte, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

34 - solution Récurrence forte.

Initialisation. 2 admet clairement un diviseur premier.

Hérédité. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que tout entier de $\llbracket 2; n \rrbracket$ admet un diviseur premier.

- si $n+1$ est premier, il est lui-même un diviseur premier de $n+1$;
- sinon, c'est que $n+1$ n'est pas premier, donc il existe un diviseur positif d de $n+1$ autre que 1 et $n+1$. Comme $d \in \llbracket 2; n \rrbracket$, par hypothèse de récurrence, d admet un diviseur premier, qui est lui-même un diviseur premier de $n+1$.

Dans les deux cas, on a prouvé que $n+1$ admet un diviseur premier.

35 - solution Récurrence forte.

Initialisation. Évident pour $n = 1$: $n = 2^0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- Si $n+1$ est pair, il existe $d \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $n+1 = 2d$. Par hypothèse de récurrence, $d = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_p}$ où les i_k sont deux à deux distincts.
Donc $n+1 = 2^{i_1+1} + \dots + 2^{i_p+1}$.
- Sinon, $n+1$ est impair, donc il existe $d \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $n+1 = 2d+1$. Par hypothèse de récurrence, $d = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_p}$ où les i_k sont deux à deux distincts.
Donc $n+1 = 2^{i_1+1} + \dots + 2^{i_p+1} + 2^0$.