MATH

Règles élémentaires de calcul

Exercices 0

Développer, factoriser, simplifier

1 ☆☆☆

Factoriser l'expression polynomiale $P(x) = 6 - 6x + 3x(x-1) - x(x-1)(x-2)$.

2 ☆☆☆ ♥

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$. Calculer $P(4)$ et factoriser P le plus possible.

3 ☆☆☆ Ⓐ ♥

Factoriser l'expression polynomiale $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$.

4 ★☆☆

Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé. Factoriser le polynôme $P : x \mapsto mx^2 - (1+m^2)x + m$ comme produit de deux polynômes (en x) de degré 1.

5 ★☆☆ Ⓐ ✍

Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (m+1)x^3 - (m^2+m+1)x^2 + (m^2+m-1)x + 1 - m$. Factoriser le polynôme P comme produit de trois polynômes (de la variable x) de degré 1.

6 ☆☆☆ ♥

Simplifier, en précisant les valeurs interdites (x est un paramètre réel) : $F = \dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{3}{x^2-x} + \dfrac{2x+1}{x^3-2x^2+x}$.

7 ☆☆☆

Simplifier en donnant les valeurs interdites (où n est un paramètre entier) : $\dfrac{7n+3}{n^2-1} - \dfrac{3}{n+1} - \dfrac{4n^2-n-1}{n^3-n}$.

Égalités et équations

8 ☆☆☆ ♥

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $(2x^2+x+2)^3 = (2x^2+3x-3)^3$.

9 ☆☆☆ ♥

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $(2x^2+x+2)^4 = (2x^2+3x-3)^4$.

10 ☆☆☆

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{2x^2+x+1} = |x+1|$.

11 ☆☆☆

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{2x^2+x+1} = x+1$.

12 ☆☆☆ ♥

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2-x-2} = |2x+2|$.

13 ☆☆☆ ♥

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2-x-2} = 2x+2$.

14 ☆☆☆ Ⓐ

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $3x^2 - 3x - 4\sqrt{x^2-x+3} = 6$.

15 ☆☆☆ ♥

Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $\ln(x)^2 - \ln(x) - 10 = \dfrac{8}{\ln(x)}$.

16 ☆☆☆

Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{1+x} = \dfrac{3}{\mathrm{e}^{-2}}$.

17 ★☆☆

On note (E) : $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0$.

1. Montrer que (E) est équivalente à :

$$(E') \quad x^2 - 6x + 10 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

2. Résoudre (E') puis (E) en posant $X = x + \dfrac{1}{x}$.

18 ★★☆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue réelle x :

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1.$$

19 ★☆☆ ♥

Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} = m$.

Indications

3 - indication Évaluer P en -1.

5 - indication Calculer $P(1)$.

10 - indication Élever au carré.

11 - indication Distinguer les cas selon la positivité de $x + 1$.

12 - indication Élever au carré.

13 - indication Distinguer les cas selon la positivité de $2x + 2$.

14 - indication Prendre « la racine » comme nouvelle inconnue.

16 - indication Poser $X = \mathrm{e}^x$.

18 - indication Comparer les carrés des deux membres de l'équation, et être observateur sur les identités remarquables. Ensuite, disjonction de cas.

19 - indication Le cas $m \leqslant 0$ est élémentaire. Ensuite, poser $X = \mathrm{e}^{2x}$ et faire une disjonction de cas sur le signe du discriminant.

Solutions

1 - solution On observe $x-1$ comme facteur commun :

$$\begin{aligned} P(x) &= 6(1-x)+3x(x-1)-x(x-1)(x-2) \\ &= (x-1)(-6+3x-x(x-2)) \\ &= (x-1)(3(-2+x)-x(x-2)) \\ &= -(x-1)(x-2)(x-3). \end{aligned}$$

2 - solution $P(4)=0$ donc on factorise $P(x)=(x-4)(x^2-3x-18)$. Or, $x^2-3x-18=(x+3)(x-6)$, donc $P(x)=(x-4)(x+3)(x-6)$.

3 - solution $P(-1)=0$, donc on peut factoriser $P(x)$ par $x+1$. Par identification, factorisation rapide ou division euclidienne, on obtient $P(x)=(x+1)(6x^2-x-2)$. Or, l'expression polynomiale $6x^2-x-2$ admet deux racines réelles : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$, donc $6x^2-x-2=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$. Finalement, $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=6(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

4 - solution $P(x)=(mx-1)(x-m)$.

5 - solution $P(x)=(x-1)((m+1)x-1)(x-(m-1))$.

6 - solution L'expression F existe lorsque $x\notin\{-1,0,1\}$, et dans ce cas :

$$F=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{x(x-1)}+\frac{2x+1}{x(x-1)^2}=\frac{x(x-1)-3(x-1)(x+1)+(2x+1)(x+1)}{x(x-1)^2(x+1)}=\frac{2(x+2)}{x(x-1)^2(x+1)}.$$

7 - solution $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$, $\frac{7n+3}{n^2-1}-\frac{3}{n+1}-\frac{4n^2-n-1}{n^3-n}=\frac{(7n+3)n-3n(n-1)-4n^2+n+1}{n(n-1)(n+1)}=\frac{7n+1}{n(n-1)(n+1)}$.

8 - solution La fonction cube étant strictement croissante, on a :

$$\begin{aligned} (2x^2+x+2)^3=(2x^2+3x-3)^3 &\iff 2x^2+x+2=2x^2+3x-3 \\ &\iff 2x=5. \end{aligned}$$

Une unique solution : $\frac{5}{2}$.

9 - solution La fonction $x\mapsto x^4$ est paire et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$\begin{aligned} (2x^2+x+2)^4=(2x^2+3x-3)^4 &\iff \left\{\begin{array}{l} 2x^2+x+2=2x^2+3x-3 \\ \text{ou} \\ 2x^2+x+2=-(2x^2+3x-3) \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} 2x=5 \\ \text{ou} \\ 4x^2+4x-1=0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

On repère dans cette dernière équation une équation polynômiale du second degré, dont les solutions sont $-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (discriminant...).
Trois solutions : $\frac{5}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

10 - solution $2x^2+x+1$ est une expression polynomiale de discriminant négatif, donc elle garde un signe constant, positif (car $2>0$). De fait, (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme $\sqrt{2x^2+x+1}\geqslant 0$ et $|x+1|\geqslant 0$, on a :

$$\sqrt{2x^2+x+1}=|x+1| \iff 2x^2+x+1=|x+1|^2 \iff 2x^2+x+1=(x+1)^2 \iff x^2-x=0.$$

L'ensemble des solutions est $\{0,1\}$.

11 - solution $2x^2+x+1$ est une expression polynomiale de discriminant négatif, donc elle garde un signe constant, positif (car $2>0$). De fait, (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$.

- Si $x<-1$, $x+1<0\leqslant\sqrt{2x^2+x+1}$ donc l'équation n'a pas de solution.

➢ Supposons $x \geqslant -1$. Comme $\sqrt{2x^2+x+1} \geqslant 0$ et $x+1 \geqslant 0$, on a :

$$\sqrt{2x^2+x+1} = x+1 \iff 2x^2+x+1 = |x+1|^2 \iff 2x^2+x+1 = (x+1)^2 \iff x^2 - x = 0.$$

Les solutions de cette équation sont 0 et 1, elles sont bien $\geqslant -1$. Donc l'ensemble des solutions est $\{0, 1\}$.

12 - solution L'ensemble des solutions est $\{-2, -1\}$.

13 - solution L'ensemble des solutions est $\{-1\}$.

14 - solution *Domaine de définition.* $x^2 - x + 3$ est un polynôme à discriminant strictement négatif donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 3 \geqslant 0$ et (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
Changement d'inconnue. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme suggéré dans l'indication, on pose $X = \sqrt{x^2 - x + 3}$. On a donc $X^2 = x^2 - x + 3$ et ainsi :

$$(E) \iff 3X^2 - 4X - 15 = 0 \iff X = 3 \text{ ou } X = -\frac{5}{3}.$$

Retour à l'inconnue x :

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \quad \sqrt{x^2-x+3} = 3 \text{ ou } \sqrt{x^2-x+3} = -\frac{5}{3} \\
&\iff \quad \sqrt{x^2-x+3} = 3 \quad \text{car la seconde équation n'admet évidemment pas de solution réelle,} \\
&\iff \quad x^2 - x + 3 = 9 \quad \text{car } \sqrt{x^2-x+3} \geqslant 0 \text{ et } 3 \geqslant 0, \\
&\iff \quad x^2 - x - 6 = 0 \\
&\iff \quad x = 3 \text{ ou } x = -2.
\end{aligned}$$

En conclusion, les solutions de (E) sont 3 et -2.
Remarque : on peut s'en sortir sans l'indication, en isolant la racine carrée, mais c'est un peu plus long.

$$(E) \iff 3(x^2 - x - 2) = 4\sqrt{x^2 - x + 3}.$$

Le polynôme $x^2 - x - 2$ admet -1 et 2 comme racines, de sorte que, sur $]-1, 2[$, il est négatif et (E) n'admet aucune solution. Supposons $x \notin]-1, 2[$ pour la suite. Alors les deux membres de (E) sont positifs donc :

$$(E) \iff 9(x^2 - x - 2)^2 = 16(x^2 - x + 3) \iff 9x^4 - 18x^3 - 43x^2 + 52x - 12 = 0.$$

On observe que 3 et -2 sont solutions de cette dernière équation. On peut alors factoriser :

$$9x^4 - 18x^3 - 43x^2 + 52x - 12 = (x-3)(x+2)(9x^2 - 9x + 2).$$

Finalement $(E) \iff (x-3)(x+2)(9x^2 - 9x + 2) = 0$. Ce dernier polynôme du second degré admet $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ comme racines, qui sont dans $]-1, 2[$ et sont donc exclues. On retrouve bien que les solutions de (E) sont 3 et -2.

15 - solution *Domaine de définition.* $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$.
Posons $X = \ln(x)$: $(E) \iff X^2 - X - 10 = \frac{8}{X} \iff X^3 - X^2 - 10X - 8 = 0$ (car $X \neq 0$).
Solution évidente : -1. On factorise $X^3 - X^2 - 10X - 8 = (X+1)(X^2 - 2X - 8) = (X+1)(X+2)(X-4)$. D'où :

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \quad X = -1 \text{ ou } X = -2 \text{ ou } X = 4 \\
&\iff \quad \ln(x) = -1 \text{ ou } \ln(x) = -2 \text{ ou } \ln(x) = 4 \\
&\iff \quad x = \mathrm{e}^{-2} \text{ ou } x = \mathrm{e}^{-1} \text{ ou } x = \mathrm{e}^{4}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\mathrm{e}^{-2}, \mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{4}\}$.

16 - solution Posons $X = \mathrm{e}^x$. Alors $(E) \iff X^2 + 2\,\mathrm{e}\,X - 3\,\mathrm{e}^2 = 0 \iff X = \mathrm{e}$ ou $X = -3\,\mathrm{e}$.
Retour à x. $(E) \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}$ ou $\mathrm{e}^x = -3\,\mathrm{e}$.
La deuxième équation n'admet pas de solution, et en composant par ln qui est bijective : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e} \iff x = 1$.
Ainsi, l'unique solution de d'équation est 1.

17 - solution 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme 0 n'est pas solution de (E), on peut supposer $x \neq 0$ et écrire :

$$(E) \iff x^2 \left(x^2 - 6x + 10 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0 \iff (E').$$

2. On calcule : $X^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. De fait :

$$(E') \iff X^2 - 6X + 8 = 0 \iff X = 2 \text{ ou } X = 4.$$

Retour à x : $(E') \iff x + \frac{1}{x} = 2$ ou $x + \frac{1}{x} = 4 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$ ou $x^2 - 8x + 1 = 0$.
Solutions : $1, 2 \pm \sqrt{3}$.

18 - solution L'équation est définie ***ssi*** $x - 1 \geqslant 0$, $x + 2\sqrt{x-1} \geqslant 0$ et $x - 2\sqrt{x-1} \geqslant 0$.
Or, si $x \geqslant 1$, on a clairement $x + 2\sqrt{x-1} \geqslant 0$, et :

$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{x-1} \geqslant 0 &\iff x \geqslant 2\sqrt{x-1} \\ &\iff x^2 \geqslant 4(x-1) \quad \text{car } x \geqslant 0,\ 2\sqrt{x-1} \geqslant 0, \\ &\iff (x-2)^2 \geqslant 0 \quad \text{ce qui est toujours vrai.} \end{aligned}$$

Bref, le domaine de définition de l'équation est $[1, +\infty[$.
Soit $x \geqslant 1$. Les deux membres de l'équation (E) étant positifs, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (E) &\iff \left(\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\right)^2 = 1 \\ &\iff 2x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1 \\ &\iff 2x + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 1 \\ &\iff 2x + 2\sqrt{(x-2)^2} = 1 \\ &\iff 2x + 2|x-2| = 1. \end{aligned}$$

- Si $x \geqslant 2$, $(E) \iff 4x - 4 = 1 \iff x = \frac{5}{4}$. Comme $\frac{5}{4} \notin [2, +\infty[$, il n'y a pas de solution dans ce cas.
- Si $1 \leqslant x < 2$, $(E) \iff 4 = 1$. L'équation n'admet pas non plus de solution dans ce cas.

En conclusion, (E) n'admet pas de solution.

19 - solution On peut déjà remarquer que, si $m \leqslant 0$, l'équation n'a pas de solution puisque le membre de gauche de l'équation est toujours strictement positif.
Supposons donc $m \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \mathrm{e}^{2x}$. On a alors :

$$(E) \iff X + \frac{1}{X} = m \iff X^2 - mX + 1 = 0 \quad \text{car } X = \mathrm{e}^{2x} \neq 0.$$

Cette nouvelle équation, que l'on note (E'), est polynomiale du second degré, son discriminant est $\Delta = m^2 - 4$.

- Si $m \in [0, 2[$, $\Delta < 0$, donc (E') n'a pas de solution, donc il en est de même de (E).
- Si $m \in [2, +\infty[$, $\Delta \geqslant 0$, donc (E') admet pour solutions : $\frac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2}$.

  Retour à x. $(E) \iff \left\{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{2x} = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2} \\ \text{ou} \\ \mathrm{e}^{2x} = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}\right) \end{array}\right.$

  Car :
  - Comme $m \geqslant 2$, il est évident que $\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2} > 0$.
  - De plus, on observe que $m^2 - 4 < m^2$, donc $\sqrt{m^2-4} < m$, donc $\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2} > 0$.

  Finalement, dans le cas ou $m \geqslant 2$, l'équation admet pour solutions : $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$ et $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$.

Conclusion : si $m < 2$, l'équation n'a pas de solution ; et si $m \geqslant 2$, elle admet pour solutions : $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$ et $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$.