

EXERCICE 1

1. (u_n) définie $\iff \forall n \in \mathbb{N}, \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) > 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{a}{2^n} \in A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ en posant $A_k =]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$.

➤ Si $a \in A_0$, on a clairement $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a}{2^n} \in A_0 \subset A$ et (u_n) est bien définie.

➤ Soit $a \in \mathbb{R} \setminus A_0$. $\frac{a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la suite $(\frac{a}{2^n})$ est à valeurs dans A_0 à partir d'un certain rang.

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{a}{2^N} \in A_0$ et $y = \frac{a}{2^{N-1}} \notin A_0$. Or, $y = 2x \in]-\pi, \pi[$. C'est donc que $\frac{a}{2^{N-1}} \in]-\pi, \pi[\setminus A_0 =]-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi[$, ce qui entraîne que $\ln(\cos(\frac{a}{2^{N-1}})) \leq 0$ et u_{N-1} n'est pas défini donc u n'est pas définie.

En conséquence, (u_n) est définie **ssi** $a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. Comme $\frac{a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on peut utiliser les développements limités :

$$\text{➤ } \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{a^2}{2 \cdot 2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right);$$

$$\text{➤ } \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{a^2}{2 \cdot 2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right).$$

Ainsi, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Or, $\sum \left(\frac{1}{4}\right)^n$ converge en tant que série géométrique avec $|\frac{1}{4}| < 1$. Par linéarité et critère de comparaison de séries à termes négatifs, on en conclut que $\sum u_n$ diverge.

3. Si $a = 0$, $u_n = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 0$.

Supposons $a \neq 0$. Alors $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2 \sin(x)}$ de sorte que :

$$u_n = \ln\left(\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) - \ln(2).$$

On observe un télescopage, en notant S_N la somme partielle de rang $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N u_n \\ &= \sum_{n=0}^N \left(\ln\left(\sin\frac{a}{2^{n-1}}\right) - \ln\left(\sin\frac{a}{2^n}\right) \right) - \sum_{n=0}^N \ln(2) \\ &= \ln(\sin(2a)) - \ln\left(\sin\left(\frac{a}{2^N}\right)\right) - (N+1)\ln(2) \\ &= \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{N+1} \sin\left(\frac{a}{2^N}\right)}\right). \end{aligned}$$

Or, $\sin\left(\frac{a}{2^N}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{2^N}$, donc $\frac{\sin(2a)}{2^{N+1} \sin\left(\frac{a}{2^N}\right)} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(2a)}{2a} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2a)}{2a}$.

Par composition de limite, $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right)$ et finalement, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ln\left(\frac{\sin 2a}{2a}\right)$.

EXERCICE 2

I.1

On vérifie que $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique (grâce à la commutativité et la bilinéarité de $\times$ dans $\mathbb{R}$, et à la linéarité de l'évaluation et de la somme). De plus, $(\cdot|\cdot)$ est :

➤ positive car $\forall P \in \mathbb{R}_p[X], (P|P) = \sum_{k=0}^n P(2k-1)^2 \geq 0$;

➤ définie. En effet, si $P \in \mathbb{R}_p[X] : (P|P) = 0 \implies \sum_{k=0}^p P(2k-1)^2 = 0 \implies \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(2k-1) = 0$.

Les nombres $2k-1$, pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, sont tous distincts donc P admet $p+1$ racines ; comme P est de degré au plus p , c'est que P est le polynôme nul.

On a ainsi validé tous les axiomes permettant de dire que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

I.2

On vérifie que la famille $(1, X)$ est orthonormée :

➤ $(1|1) = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2) = 1$;

➤ $(X|X) = \frac{1}{2}(1^2 + (-1)^2) = 1$;

➤ $(1|X) = \frac{1}{2}(1^2 + 1(-1)) = 0$.

A *fortiori*, elle est libre. Formée de 2 vecteurs de E qui est de dimension 2, $(1, X)$ est une base orthonormée de E .

Dès lors que $(1, X)$ est une base orthonormée de E , $(1, X)$ vérifie $(\mathcal{N})$ d'après le cours.

I.3.a

Par bilinéarité, $(P|J) = \frac{1}{\sqrt{2}}(P|X) - \frac{1}{\sqrt{6}}(P|1)$ donc :

$$(P|J)^2 = \frac{1}{2} \left((P|X) - \frac{1}{\sqrt{3}}(P|1) \right)^2 = \frac{1}{2} \left((P|X)^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}(P|X)(P|1) + \frac{1}{3}(P|1)^2 \right).$$

De la même manière, $(P|K)^2 = \frac{1}{2} \left((P|X)^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}(P|X)(P|1) + \frac{1}{3}(P|1)^2 \right)$.

Par sommation membre à membre : $(P|J)^2 + (P|K)^2 = (P|X)^2 + \frac{1}{3}(P|1)^2$.

I.3.b

Soit $P \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} \left(P \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \right. \right)^2 + (P|J)^2 + (P|K)^2 &= \frac{2}{3}(P|1)^2 + \left((P|X)^2 + \frac{1}{3}(P|1)^2 \right) \quad \text{selon la question I.3.a,} \\ &= (P|1)^2 + (P|X)^2 \\ &= \|P\|^2 \quad \text{selon la question I.2.} \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, J, K \right)$ vérifie la propriété $(\mathcal{N})$.

II.1.a

x étant dans $F^\perp$, il est orthogonal à tous les e_i donc d'après la propriété $(\mathcal{N})$: $\|x\|^2 = 0$.

II.1.b

D'après la question II.1.a, $F^\perp = \{0\}$.

Par ailleurs, F est engendré par une famille finie, donc F est de dimension finie, donc $E = F \oplus F^\perp = F$.

A *fortiori*, E est dimension finie.

II.2

➤ Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la propriété $(\mathcal{N})$, on a $\|e_k\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_k|e_i)^2 = \|e_k\|^4 + \sum_{i \neq k} (e_k|e_i)^2$, donc :

$$\|e_k\|^2 - \|e_k\|^4 = \sum_{i \neq k} (e_k|e_i)^2.$$

Or, $\|e_k\| \geq 1$, donc $\|e_k\|^2 \leq \|e_k\|^4$ donc $\sum_{i \neq k} (e_k|e_i)^2 \leq 0$. Chaque terme de la somme étant positif, c'est que la somme est nulle et que chacun de ses termes aussi : $\forall i \neq k, (e_k|e_i) = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut dire que $\mathcal{B}$ est orthogonale.

➤ Soit encore $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La relation $(\mathcal{N})$ devient alors $\|e_k\|^2 = \|e_k\|^4$. Or, $\|e_k\| > 0$, donc $\|e_k\| = 1$.
En conséquence, $\mathcal{B}$ est une famille orthonormale.

De plus, cette famille engendre F , qui est E selon la question II.1.b, donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base orthonormale de } E}$.

II.3.a

Comme $\mathcal{B}$ engendre $F = E$ (toujours selon II.1.b) et est libre, $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E}$.

II.3.b

On peut citer : $\boxed{\forall x, y \in E, (x|y) = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)}$ ou $\boxed{\forall x, y \in E, (x|y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)}$.

II.3.c

Soient $x, y \in E$. On a :

$$\begin{aligned} (x|y) &= \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (x+y|e_i)^2 - \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 - \sum_{i=1}^n (y|e_i)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((x|e_i) + (y|e_i))^2 - (x|e_i)^2 - (y|e_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2(x|e_i)(y|e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (x|e_i)(y|e_i). \end{aligned}$$

D'où $\boxed{(x|y) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)(y|e_i)}$.

II.3.d

Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[A^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^n (e_i|e_k)(e_k|e_j) = (e_i|e_j)$ d'après la question précédente. D'où $\boxed{A^2 = A}$.

II.3.e

Soit $x \in E$. Notons X la matrice de x dans $\mathcal{B}$: $X = ([X]_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} = [x]_{\mathcal{B}}$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(a) &\iff X \in \text{Ker}(A) \\ &\iff AX = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n [A]_{i,j} [X]_j = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n (e_i|e_j) [X]_j = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left(e_i \left| \sum_{j=1}^n [X]_j e_j \right. \right) = 0 \quad \text{par bilinéarité,} \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i \perp \sum_{j=1}^n [X]_j e_j \\ &\iff \sum_{j=1}^n [X]_j e_j \in F^\perp \quad \text{car } F = \text{Vect}((e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}), \\ &\iff \sum_{j=1}^n [X]_j e_j = 0 \quad \text{selon la question II.1.a,} \\ &\iff X = 0 \quad \text{car } \mathcal{B} \text{ est libre,} \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Ker}(a) = \{0\}}$.

II.3.f

Selon la question II.3.e, a est injectif donc bijectif. De fait, A est donc inversible. En multipliant $A^2 = A$ par A^{-1}

on obtient $A = I_n$, soit $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(e_i | e_j) = \delta_{i,j}$. En d'autres termes, $\mathcal{B}$ est orthonormale. Selon la question II.3.a, $\mathcal{B}$ est donc une base orthonormale.

PROBLÈME 1

I.1

La série $\sum a_n$ est alternée puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (-1)^n |a_n|$ avec $|a_n| = \frac{1}{n}$.

De plus, la suite $(|a_n|)$ décroît vers 0, donc le critère spécial des séries alternées s'applique : $\sum a_n$ converge.

I.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$, donc l'inégalité de Taylor-Lagrange s'applique sur $[0, 1]$:

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [0,1]}.$$

Or, par récurrence élémentaire, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}$. *A fortiori*, $f(0) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$.

Et, pour $x \in [0, 1]$, $|f^{(n+1)}(x)| = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \leq n!$ car $1+x \geq 1$ donc $(1+x)^{n+1} \geq 1$, donc $\frac{1}{(1+x)^{n+1}} \leq 1$. On en déduit

que $\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [0,1]} \leq n!$ de sorte l'inégalité de Taylor-Lagrange devient : $\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

I.3

Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, le théorème des gendarmes permet d'écrire que $\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Autrement dit, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$. Ainsi, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2)$ donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

II.1

$|a_n| = \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente en tant que série harmonique (ou série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$).

Ainsi, $\sum a_n$ ne converge pas absolument.

II.2.a

D'après la formule de Moivre : $T_n = \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k = e^{ix} \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = e^{ix} \frac{1-e^{i(n+1)x}}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}})} = e^{ix} \frac{1-e^{i(n+1)x}}{-2ie^{i\frac{x}{2}}\sin(\frac{x}{2})}$.

En simplifiant les exponentielles imaginaires pures : $T_n = \frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x} - e^{i\frac{x}{2}}}{2i\sin(\frac{x}{2})}$.

Comme $|e^{i\frac{2n+1}{2}x} - e^{i\frac{x}{2}}| \leq |e^{i\frac{2n+1}{2}x}| + |e^{i\frac{x}{2}}| \leq 2$ et $|2i| = 2$, on a directement $|T_n| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$.

II.2.b

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{T_k - T_{k-1}}{k} = \frac{e^{ikx}}{k} = a_k$, donc $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{T_k - T_{k-1}}{k}$.

II.2.c

Selon la question précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{T_k - T_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{T_k}{k} - \frac{T_{k-1}}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{T_{k-1}}{k} \quad \text{par linéarité sur les sommes finies,} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_k}{k+1} \quad \text{par changement d'indice,} \\ &= \frac{T_n}{n} - T_0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{T_k}{k} - \frac{T_k}{k+1} \right). \end{aligned}$$

Or, $T_0 = 0$ et $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, d'où $S_n = \frac{T_n}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{k(k+1)}$.

II.3

Selon la question II.2.a, $T_k = O(1)$; de plus, $\frac{1}{k(k+1)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, donc $\frac{T_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Or, $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).

Par comparaison à une série à terme général positif, $\sum \frac{T_k}{k(k+1)}$ converge absolument, donc $\boxed{\sum \frac{T_k}{k(k+1)} \text{ converge}}$.

II.4

On a encore $T_n = O(1)$, donc $\frac{T_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

De plus, selon la question II.3, $\sum \frac{T_k}{k(k+1)}$ converge donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_k}{k(k+1)}\right)_{n \geq 1}$ de ses sommes partielles converge.

Par opération algébrique, (S_n) converge ce qui signifie que $\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$.

III.1

On pose $u(t) = \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda t}$ et $v(t) = f(t)$; u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, donc on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = \left[\frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda t} f(t) \right]_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t) dt = \frac{1}{i\lambda} \left(e^{i\lambda b} f(b) - e^{i\lambda a} f(a) - \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t) dt \right).$$

On majore ensuite classiquement, d'abord par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| &\leq \frac{1}{\lambda} \left(|e^{i\lambda b} f(b)| + |e^{i\lambda a} f(a)| + \left| \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t) dt \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(b)| + |f(a)| + (b-a) \|f'\|_{\infty, [a, b]} \right) \end{aligned}$$

la norme $\|f'\|_{\infty, [a, b]}$ étant bien définie, d'après le théorème des bornes atteintes et la continuité de f' sur $[a, b]$.

Ainsi, $\boxed{c = |f(b)| + |f(a)| + (b-a) \|f'\|_{\infty, [a, b]} \text{ convient}}$.

III.2

Le théorème des gendarmes appliqué au résultat précédent entraîne directement : $\boxed{\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0}$.

IV.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité, $\int_0^\pi \tilde{T}_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi e^{ikt} dt = \sum_{k=1}^n \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_0^\pi = \sum_{k=1}^n \left(\frac{e^{-ik\pi}}{ik} - \frac{1}{ik} \right)$.

D'où $\boxed{\int_0^\pi \tilde{T}_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{ik}}$.

IV.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la même démarche, on a : $\int_0^x \tilde{T}_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_0^x = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx} - 1}{ik}$.

On en déduit que $i \int_0^x \tilde{T}_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. D'où $\boxed{S_n = i \int_0^x \tilde{T}_n(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$.

IV.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les deux questions précédentes, il vient :

$$\begin{aligned} S_n &= i \int_0^\pi \tilde{T}_n(t) dt - i \int_x^\pi \tilde{T}_n(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{k} - i \int_x^\pi \tilde{T}_n(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - i \int_x^\pi \tilde{T}_n(t) dt. \end{aligned}$$

D'après la question II.2.a, on en déduit le résultat : $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{\sin(\frac{t}{2})} dt + \frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})} dt}$.

IV.4

$$\int_x^\pi \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})} dt = \int_x^\pi \frac{\cos(\frac{t}{2}) + i \sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} dt = \int_x^\pi \frac{\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} dt + i \int_x^\pi dt = [2 \ln(\sin(\frac{t}{2}))]_x^\pi + i(\pi - x).$$

En simplifiant, il vient : $\int_x^\pi \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})} dt = -2 \ln \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) + i(\pi - x)$.

IV.5

On recolle les morceaux :

➤ d'après la question I.3, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2)$;

➤ d'après la question III.2, comme $t \mapsto \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, \pi]$, $\int_x^\pi \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{\sin(\frac{t}{2})} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit, avec les questions IV.3 et IV.4 : $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) + 0 - \ln \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) + i \frac{\pi-x}{2} = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) + i \frac{\pi-x}{2}$.

Finalement, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) + i \frac{\pi-x}{2}$.

IV.6

Comme $\sum \frac{e^{ikx}}{k}$ converge, il en est de même de sa partie réelle et de sa partie imaginaire ce qui justifie que les séries

$\sum \frac{\cos(kx)}{k}$ et $\sum \frac{\sin(kx)}{k}$ convergent.

De plus, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k} + i \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) + i \frac{\pi-x}{2}$.

Par identification des parties réelles et imaginaires, il vient : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k} = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi-x}{2}$.

PROBLÈME 2

I.1

On utilise la caractérisation :

- La fonction nulle est clairement 1-lipschitzienne (elle est en fait k -lipschitzienne pour tout $k > 0$...).
- Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2 \in \text{Lip}([a, b], \mathbb{R})$. Il existe donc $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que f_1 et f_2 soient respectivement k_1 -lipschitzienne et k_2 -lipschitzienne. Notons $g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

Soient $x, y \in [a, b]$. Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |\lambda_1(f_1(x) - f_1(y)) + \lambda_2(f_2(x) - f_2(y))| \\ &\leq |\lambda_1||f_1(x) - f_1(y)| + |\lambda_2||f_2(x) - f_2(y)| \\ &\leq (|\lambda_1|k_1 + |\lambda_2|k_2)|x - y|. \end{aligned}$$

Ainsi, g est $(|\lambda_1|k_1 + |\lambda_2|k_2)$ -lipschitzienne donc $g \in \text{Lip}([a, b], \mathbb{R})$.

Ainsi, $\text{Lip}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a, b]}$.

I.2

On vérifie que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

- C'est une forme puisque, si $f, g \in \text{Lip}([-1, 1], \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos(\theta))g(\cos(\theta)) d\theta \in \mathbb{R}$.
- Elle est linéaire à gauche, par linéarité de l'évaluation, bilinéarité du produit dans $\mathbb{R}$, et linéarité de l'intégration.
- Elle est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
- Elle est positive par positivité de l'intégration : $\forall f \in \text{Lip}([-1, 1], \mathbb{R})$, $\langle f, f \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos(\theta))^2 d\theta \geq 0$.
- Elle est définie. Soit $f \in \text{Lip}([-1, 1], \mathbb{R})$. Supposons $\langle f, f \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos(\theta))^2 d\theta = 0$.
Comme f est lipschitzienne sur $[-1, 1]$, f est continue sur $[-1, 1]$ donc $\theta \mapsto f(\cos(\theta))^2$ est continue sur $[0, \pi]$.
Par stricte positivité de l'intégration, $\forall \theta \in [0, \pi]$, $f(\cos(\theta))^2 = 0$, i.e. $f(\cos(\theta)) = 0$.
Comme $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est surjective de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, on a donc $\forall t \in [-1, 1]$, $f(t) = 0$.
En d'autres termes, f est l'application nulle sur $[-1, 1]$.

En conclusion, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

II.1

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n [M]_{\sigma(i), i}.$$

II.2

Clairement, T_0 est un polynôme de degré 0.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $M = ([M]_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice associée au déterminant T_n . On a : $T_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n [M]_{\sigma(i), i}$.

Chaque produit de cette somme est un produit de n monômes de degré ≤ 1 , donc T_n est de degré inférieur ou égal à n . De plus, la seule possibilité pour que ces n monômes soient de degré 1 est de choisir tous les termes de la diagonale, c'est-à-dire le terme relatif à $\sigma = \text{Id}_{[1, n]}$. Autrement dit, dans cette somme, il y a un terme de degré n et des termes de degré inférieur ou égal à $n - 1$ donc T_n est un polynôme de degré n .

II.3

On développe par rapport à la dernière ligne :

$$T_n = 2XT_{n-1} - \begin{vmatrix} X & 1 & & (0) \\ 1 & 2X & \ddots & \\ & 1 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 2X & 0 \\ (0) & & & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

On développe par rapport à la dernière colonne : $T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$.

II.4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Procédons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$.

➤ *Initialisation.* $T_1 = X$, donc $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.

$$T_2 = \begin{vmatrix} X & 1 \\ 1 & 2X \end{vmatrix} = 2X^2 - 1, \text{ donc } T_2(\cos(\theta)) = 2\cos^2(\theta) - 1 = \cos(2\theta).$$

➤ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Supposons que $T_{n-2}(\cos(\theta)) = \cos((n-2)\theta)$ et $T_{n-1}(\cos(\theta)) = \cos((n-1)\theta)$. D'après la question II.3 :

$$\begin{aligned} T_n(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n-1}(\cos(\theta)) - T_{n-2}(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos((n-1)\theta) - \cos((n-2)\theta) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \cos(\theta + (n-1)\theta) + \cos(\theta - (n-1)\theta) - \cos((n-2)\theta) \quad (\text{formule trigonométrique}) \\ &= \cos(n\theta) \quad \text{car } \cos(\theta - (n-1)\theta) = \cos((2-n)\theta) = \cos((n-2)\theta). \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang n .

On en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$.

Prouvons l'unicité de T_n . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

On a donc : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = P(\cos(\theta))$. Comme $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$, on peut donc dire que $\forall x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = P(x)$. Ainsi, T_n et P coïncident en une infinité de valeurs, donc $T_n = P$.

Autrement dit, $\boxed{T_n \text{ est l'unique polynôme vérifiant } \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$.

III.1

➤ Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n \neq m$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi T_n(\cos(\theta)) T_m(\cos(\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos((n+m)\theta) \, d\theta + \int_0^\pi \cos((n-m)\theta) \, d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} \right]_0^\pi + \left[\frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m} \right]_0^\pi \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((n+m)\pi)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\pi)}{n-m} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

➤ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_0 \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n\theta)}{n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(n\pi)}{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

➤ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \|T_n\|^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta)^2 \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 + \cos(2n\theta)}{2} \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi \cos(2n\theta) \, d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi} (\pi + 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\triangleright \|T_0\|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} d\theta = 1.$$

La famille est donc également normée. Donc (T_n) est orthonormée.

III.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que la distance de f à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ vérifie : $d(f, \mathbb{R}_{n+1}[X]) = \|f - p_{n+1}(f)\|$.
Or, $p_n(f) \in \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_{n+1}[X]$, donc $d(f, \mathbb{R}_{n+1}[X]) = \inf\{\|f - P\|, P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]\} \leq \|f - p_n(f)\|$.
D'où la décroissance de $(\|f - p_n(f)\|)$.

III.3

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle f - p_n(f), g - p_n(g) \rangle| \leq \|f - p_n(f)\| \|g - p_n(g)\|$.

De plus, comme $(T_k)_{k \in [0, n]}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$, on a $p_n(f) = \sum_{i=0}^n \langle f, T_i \rangle T_i$.

De même pour $p_n(g) = \sum_{j=0}^n \langle g, T_j \rangle T_j$.

Par bilinéarité : $\langle f - p_n(f), g - p_n(g) \rangle = \langle f, g \rangle - \sum_{i=0}^n \langle f, T_i \rangle \langle g, T_i \rangle - \sum_{j=0}^n \langle g, T_j \rangle \langle f, T_j \rangle + \sum_{0 \leq i, j \leq n} \langle f, T_i \rangle \langle g, T_j \rangle \langle T_i, T_j \rangle$.

Dans cette dernière somme, les termes pour $i \neq j$ sont nuls et alors les trois derniers termes sont identiques au signe près. D'où $\langle f - p_n(f), g - p_n(g) \rangle = \langle f, g \rangle - \sum_{i=0}^n \langle f, T_i \rangle \langle g, T_i \rangle$.

En conclusion, $\left| \langle f, g \rangle - \sum_{k=0}^n \langle f, T_k \rangle \langle g, T_k \rangle \right| \leq \|f - p_n(f)\| \|g - p_n(g)\|$.

IV.1

D'après la formule de König-Huygens pour la variable aléatoire $|Y|$: $0 \leq \mathbb{V}(|Y|) = \mathbb{E}(|Y|^2) - \mathbb{E}(|Y|)^2 = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(|Y|)^2$.
D'après la même formule pour Y : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}(Y^2)$.

Donc $\mathbb{E}(|Y|)^2 \leq \mathbb{E}(Y^2) \leq \mathbb{V}(Y)$. Comme $\mathbb{E}(|Y|) \geq 0$, on en déduit $\mathbb{E}(|Y|) \leq \sigma(Y)$.

IV.2.a

La fonction $x \mapsto x(1-x)$ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes.

En particulier, $\max_{x \in [0, 1]} x(1-x)$ est bien défini.

De plus, cette fonction est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, donc elle atteint son maximum en $\frac{1}{2}$, et celui-ci vaut $\max_{x \in [0, 1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$.

IV.2.b

Posons $Y = \frac{S_n}{n} - x$.

Par linéarité, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(S_n) - x = \frac{1}{n} nx - x = 0$. Ainsi, Y est centrée, donc d'après la question IV.1 : $\mathbb{E}(|Y|) \leq \sigma(Y)$.

Calculons $\mathbb{V}(Y)$: $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n} - x\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(S_n) = \frac{x(1-x)}{n}$.

D'après la question IV.2.a : $\mathbb{V}(Y) \leq \frac{1}{4n}$. Donc $\sigma(Y) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. En résumé, $\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|\right) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

IV.2.c

D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = k) = B_n(f)(x)$.

On écrit alors :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x) \right| \\ &= \left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right) \right| \quad \text{par linéarité de l'espérance,} \\ &\leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) \quad \text{par inégalité triangulaire (pour les sommes finies),} \\ &\leq \mathbb{E}\left(k \left|\frac{S_n}{n} - x\right|\right) \quad \text{car } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne,} \\ &\leq k \mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|\right) \quad \text{par linéarité,} \\ &\leq k \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

D'où le résultat : $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{k}{2\sqrt{n}}$.

IV.3.a

D'après la question précédente, $\forall x \in [0, 1], |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{k}{2\sqrt{n}}$.

Par passage à la borne supérieure, $0 \leq \|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{k}{2\sqrt{n}}$.

Or, $\frac{k}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Autrement dit, la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

IV.3.b

Soit $g \in \text{Lip}([-1, 1], \mathbb{R})$. $\varphi : x \mapsto 2x - 1$ est une bijection de $[0, 1]$ dans $[-1, 1]$, on décide de poser $f : x \mapsto g\left(\frac{x+1}{2}\right)$, qui est donc définie sur $[0, 1]$.

➤ De plus, $f \in \text{Lip}([0, 1], \mathbb{R})$. En effet, si $x, y \in [0, 1]$:

$$|f(x) - f(y)| = |g(2x - 1) - g(2y - 1)| \leq k|(2x - 1) - (2y - 1)| \leq 2k|x - y|$$

en utilisant le réel strictement positif k tel que g est k -lipschitzienne. Donc f est $2k$ -lipschitzienne.

➤ D'après la question IV.3.a, la suite de polynômes $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f .

En utilisant la bijection réciproque φ^{-1} de φ , on définit alors une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant :

$$\forall x \in [-1, 1], P_n(x) = B_n(f)\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \|P_n - g\|_\infty^{[-1, 1]} &= \sup \{|P_n(x) - g(x)|, x \in [-1, 1]\} \\ &= \sup \left\{ \left| B_n(f)\left(\frac{x+1}{2}\right) - g(x) \right|, x \in [-1, 1] \right\} \\ &= \sup \{|B_n(f)(x) - g(2x - 1)|, x \in [0, 1]\} \quad \text{par bijectivité,} \\ &= \sup \{|B_n(f)(x) - f(x)|, x \in [0, 1]\} \\ &= \|B_n(f) - f\|_\infty^{[0, 1]} \end{aligned}$$

donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g .

V.1.a

D'après la question IV.3.b, il existe une suite de polynôme de $(B_n(f))$ qui converge uniformément vers f .

Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - P_n\|_\infty < \varepsilon$.

V.1.b

On a $\|f - p_N(f)\| = d(f, \mathbb{R}_N[X])$. Or, $P \in \mathbb{R}_N[X]$, donc $d(f, \mathbb{R}_N[X]) \leq \|f - P\|$, soit $\|f - p_N(f)\| \leq \|f - P\|$.

V.1.c

Selon la question III.2 et la question V.1.b : $\forall n \geq N, \|f - p_n(f)\| \leq \|f - P\|$.

Il suffit alors de remarquer que $\|f - P\| \leq \|f - P\|_\infty^{[-1, 1]} \sqrt{2}$, ce qui découle de :

$$\|f - P\|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\cos(\theta)) - P(\cos(\theta)))^2 d\theta \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\|f - P\|_\infty^{[-1, 1]})^2 d\theta \leq 2(\|f - P\|_\infty^{[-1, 1]})^2.$$

D'où $\forall n \geq N, \|f - p_n(f)\| < \varepsilon \sqrt{2}$.

V.2

Selon V.1.a, $\|f - p_n(f)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De la même manière, on a $\|g - p_n(g)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'après le théorème des gendarmes et la question III.3, $\langle f, g \rangle - \sum_{k=0}^n \langle f, T_k \rangle \langle g, T_k \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent, $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle f, T_k \rangle \langle g, T_k \rangle$.

V.3.a

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\langle f, T_k \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\cos(\theta)| \cos(k\theta) d\theta$. En posant $t = \theta - \frac{\pi}{2}$, changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif de $[0, \pi]$ dans

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a directement $\langle f, T_k \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(t)| \cos\left(kt + \frac{k\pi}{2}\right) dt$ puisque $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t)$.

V.3.b

- Soit $k \in \mathbb{N}$. $\cos((2k+1)t + k\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin((2k+1)t + k\pi) = (-1)^k \sin((2k+1)t)$ donc $\langle f, T_{2k+1} \rangle = 0$ car l'intégrande est impaire et l'intégrale se fait sur un intervalle centré en 0.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\cos(2kt + k\pi) = (-1)^k \cos(2kt)$, donc :

$$\begin{aligned}
 \langle f, T_{2k} \rangle &= (-1)^k \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(t)| \cos(2kt) \, dt \\
 &= (-1)^k \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos(2kt) \, dt \quad \text{par parité de l'intégrande,} \\
 &= (-1)^k \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin((1+2k)t) + \sin((1-2k)t)) \, dt \\
 &= (-1)^k \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos((1+2k)t)}{1+2k} - \frac{\cos((1-2k)t)}{1-2k} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= (-1)^k \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1-2k} \right] \\
 &= (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}.
 \end{aligned}$$

D'où $\langle f, T_{2k} \rangle = (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} \frac{1}{4k^2-1}$.

➤ $\langle f, T_0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi |\cos(\theta)| \, d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

On calcule ensuite $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$ en utilisant la question V.2 : $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle f, T_k \rangle \langle g, T_k \rangle$.

Or, selon les calculs précédents, le membre de droite de cette égalité est $\frac{8}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

Et $\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(\theta) \, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 + \cos(2\theta)) \, d\theta = 1$.

On en déduit $\frac{8}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = 1$, soit $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

V.3.c

On a $\frac{1}{4X^2-1} = \frac{1}{(2X-1)^2(2X+1)^2}$. Donc il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{(2X-1)^2(2X+1)^2} = \frac{a}{2X-1} + \frac{b}{(2X-1)^2} + \frac{c}{2X+1} + \frac{d}{(2X+1)^2}$. Clairement, $b = d = \frac{1}{4}$.

En prenant la limite quand $X \rightarrow +\infty$, après avoir multiplié par X , on a $0 = \frac{a}{2} + \frac{c}{2}$ donc $c = -a$.

Et en évaluant en 0, il vient $1 = -a + \frac{1}{4} + -a + \frac{1}{4}$, soit $a = -\frac{1}{4}$ et $c = \frac{1}{4}$.

Ainsi, $\frac{1}{4X^2-1} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2X-1} + \frac{1}{(2X-1)^2} + \frac{1}{2X+1} + \frac{1}{(2X+1)^2} \right)$.

En injectant dans la relation précédente, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)^2} \right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

On peut utiliser la linéarité pour isoler les deux carrés (termes généraux de séries convergentes) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Par translation d'indice, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

En isolant le premier terme : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - 1$.

Par télescopage : $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right) = -1$.

On en déduit : $2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$, soit $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Enfin, on décompose $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Or, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donc $\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, ce qui entraîne : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

★ ★ ★