MATH

Devoir Surveillé n°6

MPSI 22/04/2025 Durée 4h00

Préambule

Les calculatrices **sont interdites** pour cette épreuve.
Vous apporterez le plus grand soin à la rigueur et à la rédaction de vos réponses.
Vous êtes invités à <u>encadrer</u> ou souligner vos réponses.
Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, qui sont tous largement indépendants.

EXERCICE 1

1. Étude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées.
On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right] \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}.$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$?
5. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

2. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1).$$

1. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
4. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. *On explicitera les neufs coefficients de A^n.*
6. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.
7. En déduire que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Une autre preuve du résultat précédent

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

2. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 2

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant :

$$\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Notons $p = \mathrm{rg}(A)$. Supposons $p \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Justifier qu'il existe p colonnes de A formant une famille libre (on pourra supposer pour la question suivante que ce sont les p premières colonnes de A).
   (b) Construire une matrice B non inversible telle que $A + B$ soit inversible.
3. Déduire des questions précédentes que $A = 0$.

PROBLÈME

Dans tout ce problème, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \quad \text{et} \quad \phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_\phi$ leurs courbes représentatives.

Partie I - Étude de f

1. Justifier que f est paire et continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{1+x^2}$ quand $x \to 0$.
   (b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0. Par quelle valeur peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Désormais, f désigne la fonction obtenue par ce prolongement.

3. Justifier que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$ ainsi que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en 0.
4. Justifer que f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
5. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}x^2 f'(x).$$

   (b) En déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
6. Déterminer la limite et un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Partie II - Étude d'une bijection réciproque

1. Montrer qu'il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$, à déterminer, tel que la restriction $\widehat{f}$ de f à $\mathbb{R}^+$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur I.

Désormais, on note g la bijection réciproque de $\widehat{f}$.

2. La fonction g est-elle strictement monotone sur I ? continue sur I ?
3. Que dire de la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ de g au voisinage de 0 ?
4. Vérifier que g est dérivable sur $I\backslash\{1\}$ et donner l'expression de g' sur $I\backslash\{1\}$ en fonction de f' et g. Que dire au point 1 ?
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère orthonormé (unité : 2 cm).

Partie III - Étude de ϕ

1. Former le développement limité à l'ordre 2 de ϕ au voisinage de 0. Par quelle valeur peut-on prolonger ϕ par continuité en 0 ?

Désormais, ϕ désigne la fonction obtenue par ce prolongement.

2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que ϕ est paire.
3. Vérifier que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\phi'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\phi'(x) = \frac{f(x) - \phi(x)}{x}.$$

4. Étude des variations de ϕ.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\forall t \in [0, x]$, $f(x) \leqslant f(t) \leqslant 1$. En déduire que $f(x) \leqslant \phi(x) \leqslant 1$.
   (b) Ce dernier encadrement est-il valable pour tout $x \in \mathbb{R}$?
   (c) En déduire les variations de ϕ.

5. Étude de la limite de $\phi(x)$ quand $x \to +\infty$.
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Indication : on pourra majorer Arctan(t).
   (b) En déduire que $\phi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
6. Tracer $\mathcal{C}_\phi$ dans le même repère que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Partie IV - Point fixe de ϕ

1. Majoration de $|\phi'|$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:
   $$|\phi'(x)| \leqslant \frac{1-f(x)}{x} = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   (b) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\phi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   Indication : on pourra commencer par traiter le cas où $x > 0$.
2. Point fixe de ϕ.
   Montrer que l'équation $\phi(x) = x$ admet une unique solution réelle, et que celle-ci appartient à $]0,1]$.

On note α cette solution pour le reste du problème.

Partie V - Étude d'une suite itérative

On considère une suite u définie par son premier terme u_0, réel fixé, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = \phi(u_n).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}\,|u_n - \alpha|$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1+|u_0|}{4^n}$.
3. En déduire que la suite u est convergente et préciser sa limite.

Partie VI - Obtention d'une valeur approchée du point fixe

1. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
   (a) Donner une expression de $\displaystyle\int_0^1 f(ux)\,\mathrm{d}u$ à l'aide du changement $t = ux$.
   (b) En déduire que : $\phi(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kx}{n}\right)$.
2. **Algorithmique.** Les questions ci-dessous sont de nature algorithmique. Elles devront être écrites en langage `Python` ou `OCaml`, au choix. On indiquera clairement au début de cette section le langage choisi et on veillera à garder le même choix au cours des différentes questions.
   (a) Écrire une fonction f qui renvoie le nombre $f(x)$ pour tout x flottant positif.
   Donnée : les deux langages `Python` *et* `OCaml` *sont pourvus d'une fonction* `atan` *qui renvoie une valeur approchée de* Arctan(`x`) *pour un flottant* `x` *passé en argument. Cette fonction se situe dans la bibliothèque* `math` *pour le langage* `Python` *et se trouve à la racine du langage* `OCaml`.
   (b) Écrire une fonction `phi` qui renvoie une valeur approchée de $\phi(x)$ pour tout x flottant strictement positif.
   Indication : on pourra utiliser l'approximation fournie par la question IV.1.b avec $n = 100$.
   (c) Écrire une fonction `iter` qui, étant donnés un entier naturel n et un flottant strictement positif u_0, renvoie une valeur approchée du nombre u_n défini dans la partie V.
   (d) Écrire une fonction `approx` qui, étant donnée une valeur flottante strictement positive `eps`, renvoie un couple (n, u_n) tel que $|u_n - \alpha| \leqslant$ `eps`.