MATH

Devoir Surveillé n°5

MPSI 22/03/2025 Durée 4h00

Préambule

Les calculatrices **sont interdites** pour cette épreuve.
Vous apporterez le plus grand soin à la rigueur et à la rédaction de vos réponses.
Vous êtes invités à <u>encadrer</u> ou souligner vos réponses.
Le sujet est composé de trois questions de cours, de deux savoir-faire et de deux problèmes, qui sont tous largement indépendants.

COURS

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, \dots, x_n)$ une famille de $n+1$ réels distincts.
   Définir la famille $(L_0, \dots, L_n)$ des polynômes de Lagrange associés à ces $n+1$ scalaires distincts $x_0, \dots, x_n$.
   Énoncer le théorème d'interpolation de Lagrange, associé à ces $n+1$ scalaires.
2. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, indexé sur un ensemble fini.
   Donner la définition et deux caractérisations de : « la famille $(f_i)_{i \in I}$ est libre ».
3. Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F.
   Donner la définition du noyau de f. Énoncer et prouver la caractérisation de l'injectivité de f à l'aide du noyau.

SAVOIR-FAIRE DU COURS

1. On pose $P = (X-1)(X-2)$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P = (X-1)(X-2)$.
   (b) Calculer $P(M)$ et en déduire M^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Posons $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\}$ et $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.
   (a) Justifier que $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (b) Expliciter la projection p sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$ et la symétrie s par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, a désigne un réel et m un entier naturel. On note E l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $E_a^{(m)}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles il existe un polynôme P de $\mathbb{R}_m[X]$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n). \tag{E}$$

Partie I

Identifier $E_a^{(0)}$.
On donnera l'expression des suites (u_n) de $E_a^{(0)}$ en fonction de n.

Partie II

Dans cette partie, on suppose $a \neq 1$.

1. (a) Montrer que l'application φ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_m[X]$ par :

$$\varphi(P) = (P(0), P(1), \ldots, P(m))$$

   est un isomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$ sur $\mathbb{R}^{m+1}$.

   (b) En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $E_a^{(m)}$, le polynôme P de $\mathbb{R}_m[X]$ vérifiant (E) est unique.

Étant donnée une suite u de $E_a^{(m)}$, on note désormais $\theta(u)$ l'unique polynôme P défini à la question précédente. On définit de cette manière une application θ de $E_a^{(m)}$ dans $\mathbb{R}_m[X]$.

2. Montrer que $E_a^{(m)}$ est un espace vectoriel.
3. Montrer que θ est une application linéaire.
4. Déterminer le noyau de θ.
5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.
   (a) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
   (b) Montrer que $\forall k \in [\![0\,, m]\!]$, $Q_k \in \mathrm{Im}(\theta)$.
   (c) En déduire $\mathrm{Im}(\theta)$.
6. Déterminer la dimension de $E_a^{(m)}$.
7. On pose y la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $y_n = a^n$; et pour tout $k \in [\![0\,, m]\!]$, on appelle $x^{(k)}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n^{(k)} = n^k$. Montrer que $(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, y)$ est une base de $E_a^{(m)}$.
8. Application : déterminer la suite (u_n) vérifiant $u_0 = -2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7.$$

Partie III

1. En s'inspirant de la démarche suivie dans la partie II, déterminer $E_1^{(m)}$.
2. Application : déterminer la suite (u_n) vérifiant $u_0 = -2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - 6n + 1.$$

PROBLÈME 2

L'objectif de ce sujet est l'étude de l'ensemble des matrices magiques.
On fixe un entier naturel $n \geqslant 2$, on note $\mathbb{K}$ un corps et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour toute matrice $M = ([M]_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note :

- pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, $\ell_i(M) = \sum\limits_{j=1}^{n} [M]_{i,j}$, la somme des éléments sur la i-ème ligne de M ;
- pour tout $j \in [\![1\,,n]\!]$, $c_j(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} [M]_{i,j}$, la somme des éléments sur la j-ème colonne de M ;
- $\mathrm{Tr}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} [M]_{i,i}$, que l'on appelle usuellement la *trace* de M ;
- $\mathrm{ATr}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} [M]_{i,n-i+1}$, que l'on appelle l'*anti-trace* de M.

On note également $LC_n = \{\ell_i,\ i \in [\![1\,,n]\!]\} \cup \{c_j,\ j \in [\![1\,,n]\!]\}$.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *semi-magique* lorsqu'il existe une constante $\sigma \in \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall f \in LC_n, \quad f(M) = \sigma.$$

On dit également que cette matrice M est *magique* lorsqu'elle vérifie en plus $\forall f \in \{\mathrm{Tr}, \mathrm{ATr}\}$, $f(M) = \sigma$.
Une telle constante σ, lorsqu'elle existe, est clairement unique ; on l'appelle *constante magique* de M et on la note $\sigma(M)$.
On note $SG_n(\mathbb{K})$ et $G_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement semi-magiques et magiques.
On introduit enfin la matrice J_n de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Partie I - Un premier exemple élémentaire

1. Exhiber une matrice de taille 2 magique ; une matrice de taille 2 semi-magique mais pas magique ; et une qui n'est pas magique.
2. Expliciter l'ensemble $SG_2(\mathbb{K})$ et vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ de dimension 2.
3. Montrer que $G_2(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $SG_2(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension.

Partie II - Aspect structurel

On s'intéresse dans cette partie à la structure algébrique de $SG_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $SG_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et justifier que l'application σ est une forme linéaire sur $SG_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'application $t : A \mapsto A^\top$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $SG_n(\mathbb{K})$, où $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A.
3. Montrer que $SG_n(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et justifier que l'application σ est un morphisme d'anneaux.
4. Justifier que, si $A \in SG_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} \in SG_n(\mathbb{K})$ et expliciter $\sigma(A^{-1})$ en fonction de $\sigma(A)$.

On admet que $G_n(\mathbb{K})$ est également un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admettant $A \mapsto A^\top$ pour automorphisme et que la restriction de σ à $G_n(\mathbb{K})$ est une forme linéaire sur $G_n(\mathbb{K})$.

5. L'ensemble $G_n(\mathbb{K})$ est-il un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

Partie III - Cas particulier de la taille 3

Le but de cette partie est d'expliciter une base de $G_3(\mathbb{K})$, ce qui permet en particulier de savoir comment construire une matrice magique de taille 3. On désigne usuellement $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_3(\mathbb{K})$ les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ formés des matrices respectivement antisymétriques et symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

1. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{A}_3(\mathbb{K}) \cap G_3(\mathbb{K})$ est une droite vectorielle engendrée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier que l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_3(\mathbb{K}) \cap G_3(\mathbb{K})$ de trace nulle est une droite vectorielle engendrée par :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que l'ensemble $\mathcal{S}_3(\mathbb{K}) \cap G_3(\mathbb{K})$ est un plan vectoriel engendré par S et J_3.
4. Montrer que les ensembles $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_3(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.
5. En déduire que les ensembles $\mathcal{A}_3(\mathbb{K}) \cap G_3(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_3(\mathbb{K}) \cap G_3(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $G_3(\mathbb{K})$.
6. Déterminer une base de $G_3(\mathbb{K})$.

Partie IV - Intersection d'hyperplans

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille de formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On cherche à calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_p = \bigcap\limits_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_k)$.

1. Montrer par récurrence sur $p \in [\![0\,,n^2]\!]$ que, si la famille $(f_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ libre, alors $\dim(\mathcal{H}_p) = n^2 - p$.
2. En déduire la dimension de $\mathcal{H}_p$ dans le cas général.

Partie V - Dimension de l'espace des matrices semi-magiques

1. Justifier que la famille des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, définies dans l'introduction, $(\ell_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \cup (c_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est liée et que la famille $(\ell_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \cup (c_j)_{j\in[\![1,n-1]\!]}$ est libre.
2. En déduire la dimension de $K = \{M \in SG_n(\mathbb{K}),\ \sigma(M) = 0\}$.
3. Montrer que $SG_n(\mathbb{K}) = K \oplus \operatorname{Vect}(J_n)$ et en déduire la dimension de $SG_n(\mathbb{K})$.

Partie VI - Dimension de l'espace des matrices magiques

Dans cette partie, on suppose $n > 2$. On définit deux applications φ et ψ de la manière suivante :

$$\forall M \in SG_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \ell_1(M) - \operatorname{Tr}(M) \quad \text{et} \quad \psi(M) = \ell_2(M) - \operatorname{ATr}(M).$$

1. Justifier que φ et ψ sont deux formes linéaires sur $SG_n(\mathbb{K})$, linéairement indépendantes.
2. En déduire la dimension de $G_n(\mathbb{K})$.