MATH

Devoir Surveillé n°4

MPSI 18/01/2025

Préambule

Durée : 4h00.
Les calculatrices **sont interdites** pour cette épreuve.
Vous apporterez le plus grand soin à la rigueur et à la rédaction de vos réponses.
Vous êtes invités à encadrer ou souligner vos réponses.
Le sujet est composé de trois questions de cours, de trois savoir-faire, d'un exercice et d'un problème, qui sont tous largement indépendants.

COURS

1. Énoncer précisément le théorème des bornes atteintes.
2. Donner le développement limité en 0 à l'ordre n de e^x, de $\sin(x)$ et de $\ln(1+x)$.
   On pourra poser $n = 2p$ puis $n = 2p+1$ pour $\sin(x)$.
3. Énoncer précisément le théorème de Rolle.

SAVOIR-FAIRE DU COURS

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.
2. Trouver un équivalent simple de $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ quand $x \to 0$.
3. Calculer la dérivée n-ème de $x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^x$, pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE - Adapté d'un oral de Centrale-Supélec MP

On définit la fonction f en posant $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$. On note ensuite $a_0 = 0$, $b_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = f(a_n) \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{a_{n+1}}.$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
2. Montrer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à valeurs dans $[0\,,1]$ et croissante.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(1-a_n)$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - a_n \leqslant \dfrac{1}{(2\sqrt{2})^n}$ et en déduire la limite de la suite (a_n).
5. Justifier qu'il existe une suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$, que l'on explicitera, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \cos(\theta_n)$.
6. Justifier que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et bien définie et qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \lambda_n \sin(\theta_n)$.
7. En déduire la limite ℓ de la suite (b_n).
8. Montrer qu'il existe deux constantes α et β, à déterminer, telles que $b_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \dfrac{\alpha}{4^n} + \dfrac{\beta}{16^n} + o\left(\dfrac{1}{16^n}\right)$.

PROBLÈME - Inspiré d'un écrit de Centrale-Supélec PC 2000

On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions réelles qui sont à la fois : positives ou nulles, convexes, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qui s'annulent en 0. On note $\mathcal{K}_\infty$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}$ qui vérifient en outre :

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Partie I. Quelques exemples

1. On considère, dans cette question uniquement, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - \operatorname{th}(x)$.
   (a) Vérifier que $f \in \mathcal{K}$.
   (b) Calculer la limite quand $x \to +\infty$ de $f'(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$. f est-elle dans $\mathcal{K}_\infty$?
   (c) Former un développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\dfrac{1+X}{1-X}$.
   (d) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - 1 + 2\,\mathrm{e}^{-2x} + o\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   (e) Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on déterminera une équation, et préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.
2. On considère, dans cette question uniquement, la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = x \operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

   (a) Vérifier que $f \in \mathcal{K}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   (c) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{\pi}{2}x - \ln(x) + O(1)$.
   (d) Calculer la limite quand $x \to +\infty$, de $f'(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$.
   f est-elle dans $\mathcal{K}_\infty$? Existe-t-il une droite asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$?
3. Dans cette question, on fixe $\alpha \in]1\,,+\infty[$ et on pose $\varphi_\alpha(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi_\alpha(x) = \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$.
   Montrer que $\varphi_\alpha \in \mathcal{K}_\infty$.

Partie II. Quelques inégalités utiles

Dans toute cette partie, on considère une fonction $f \in \mathcal{K}$ quelconque.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leqslant x f'(x)$.
2. En déduire que la fonction $\theta : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ f(x) + f(y) \leqslant f(x+y)$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \dfrac{x}{2} f'\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant f(x)$.

Partie III. Comportement à l'infini

Dans toute cette partie, on considère encore une fonction $f \in \mathcal{K}$ quelconque. On suggère de bien lire les résultats de la partie II ; on pourra naturellement les utiliser, même si l'on n'a pas réussi à les démontrer.

1. Montrer que $f \in \mathcal{K}_\infty$ si, et seulement si, $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On suppose dans la fin de cette partie que f n'est pas constante et n'est pas dans $\mathcal{K}_\infty$.

2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} ax$.
3. Montrer que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
4. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $f(x) - ax \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} b$.
5. Dans le cas où $b \in \mathbb{R}$, montrer que la courbe représentative de f possède une droite asymptote au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Partie IV. Transformée de Legendre d'une fonction de $\mathcal{K}_\infty$

À toute fonction $f \in \mathcal{K}_\infty$ et tout $m \in \mathbb{R}^+$, on associe la fonction $h_m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h_m(x) = mx - f(x).$$

On définit également l'ensemble $J(f) = \{m \in \mathbb{R}^+,\ h_m \text{ est majorée sur } \mathbb{R}^+\}$ et, pour tout $m \in J(f)$, on pose :

$$f^*(m) = \sup\{h_m(x),\ x \in \mathbb{R}^+\}.$$

La fonction f^* ainsi définie sur $J(f)$ est appelée *transformée de Legendre-Fenchel* de f.

1. Déterminer, pour $m \in \mathbb{R}^+$, la limite de h_m en $+\infty$ et en déduire que $J(f) = \mathbb{R}^+$.
2. Montrer que :
$$\forall (x,m) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ f(x) + f^*(m) \geqslant mx.$$
3. Soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{K}_\infty^2$. Montrer que, si $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_1^*(x) \geqslant f_2^*(x)$.
4. Montrer que f^* est convexe sur $\mathbb{R}^+$.
5. Dans cette question, on cherche à déterminer les éléments f de $\mathcal{K}_\infty$ vérifiant $f^* = f$.
   (a) Montrer que la fonction $k : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est dans $\mathcal{K}_\infty$ et vérifie $k^* = k$.
   (b) On suppose réciproquement que f est une fonction de $\mathcal{K}_\infty$ qui vérifie $f^* = f$.
   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geqslant k(x)$ puis que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = k(x)$.
6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f^*(f'(x)) = xf'(x) - f(x)$.
7. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{K}_\infty$, $(f^*)^* = f$.
8. On définit l'ensemble $\mathcal{K}_\infty^b$ des fonctions positives ou nulles, convexes, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et pour lesquelles il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \lambda \leqslant f''(x) \leqslant \mu.$$
   (a) Soit $f \in \mathcal{K}_\infty^b$ et notons $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ une constante vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f''(x) \geqslant \lambda$.
   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \geqslant \lambda x$, et en déduire que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que, si $f \in \mathcal{K}_\infty^b$, alors f^* est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer $(f^*)'$ en fonction de f'.
   (c) Montrer que l'application suivante est bijective :
$$\mathscr{L} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{K}_\infty^b & \longrightarrow & \mathcal{K}_\infty^b \\ f & \longmapsto & f^* \end{array} \right. .$$
9. *Application.* Soit $(p,q) \in \,]1\,,+\infty[^2$ vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   On reprend la fonction φ_α introduit dans la partie I à la question I.3.
   (a) Montrer que $\varphi_p^* = \varphi_q$.
   (b) En déduire l'inégalité de Young : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.