MATH

Devoir surveillé n°2

Un corrigé

EXERCICE

On commence par échelonner le système :

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + (2-\lambda)z = \lambda \\ 2x - \lambda y + z = \lambda \\ (3-\lambda)x - y + z = \lambda \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{cases} x - y + (2-\lambda)z = \lambda \\ (2-\lambda)y + (2\lambda-3)z = -\lambda & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ (2-\lambda)y - (\lambda^2-5\lambda+5)z = \lambda^2 - 2\lambda & L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda-3)L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + (2-\lambda)z = \lambda \\ (2-\lambda)y + (2\lambda-3)z = -\lambda \\ (\lambda-1)(\lambda-2)z = \lambda(1-\lambda) & L_3 \leftarrow -L_3 + L_2 \end{cases}$$

Le système est échelonné. Il est de Cramer ***ssi*** ses coefficients diagonaux sont non nuls. On entame alors la disjonction de cas suivante :

➢ Si $\lambda = 2$, (S) devient : $\begin{cases} x - y = 2 \\ z = -2 \\ 0 = -2 \end{cases}$

Dans ce cas, $\boxed{(S) \text{ n'a pas de solution}}$ puisqu'il est incompatible.

➢ Si $\lambda = 1$, (S) devient : $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z - 1 \end{cases}$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S) est $\boxed{\{(0, z-1, z), z \in \mathbb{R}\}}$.

➢ Si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, il est de Cramer donc il admet donc une unique solution :

$$(S) \iff \begin{cases} x = \frac{\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)^2} \\ y = \frac{\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)^2} \\ z = \frac{\lambda}{2-\lambda} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S) est $\boxed{\left(\frac{\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)^2}, \frac{\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)^2}, \frac{\lambda}{2-\lambda}\right)}$.

PROBLÈME 1

I.1

D'après la formule du binôme de Newton, $S_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = (-1+1)^n = 0^n$. $\boxed{S_{n,0} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}}$

I.2.a

$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ en tant que polynôme et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} x^{k-1}}$.

I.2.b

D'après la formule du binôme de Newton, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-x)^n}$.

I.2.c

En dérivant l'expression obtenue en I.2.b, on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -n(1-x)^{n-1}}$.

I.2.d

En évaluant en 1 les relations obtenues aux questions I.2.a et I.2.c, on a $f'(1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = -n \cdot 0^{n-1}$.

On conclut : $\boxed{S_{n,1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 2, \\ -1 & \text{si } n = 1. \end{cases}}$

I.3.a

D'après la formule du binôme de Newton, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (1-\mathrm{e}^x)^n}$.

I.3.b

La fonction $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

En dérivant l'expression de l'énoncé, il vient $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} \mathrm{e}^{kx}$ puis :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 \binom{n}{k} \mathrm{e}^{kx}} .$$

En dérivant l'expression obtenue en I.2.a, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -n\,\mathrm{e}^x (1-\mathrm{e}^x)^{n-1}$ puis :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = -n\,\mathrm{e}^x (1-\mathrm{e}^x)^{n-1} + n(n-1)\,\mathrm{e}^{2x} (1-\mathrm{e}^x)^{n-2} = n\,\mathrm{e}^x (1-\mathrm{e}^x)^{n-2} (\mathrm{e}^x - 1 + (n-1)\,\mathrm{e}^x) .$$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = n\,\mathrm{e}^x (1-\mathrm{e}^x)^{n-2} (n\,\mathrm{e}^x - 1)}$.

I.3.c

En évaluant en 0 les relations obtenues à la question I.3.b, on a $g''(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 \binom{n}{k} = n(n-1) \cdot 0^{n-2}$, c'est-à-dire

$\boxed{S_{n,2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 3, \\ 2 & \text{si } n = 2. \end{cases}}$

II.1

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$.

- Si $k \geqslant 1$, $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n}{k}$.
- Si $k = 0$, alors les deux membres de l'égalité valent 0.

Dans les deux cas, on a montré que $\boxed{\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ k \leqslant n,\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$.

II.2

Selon II.1, on a immédiatement $\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \geqslant p+1,\ S_{n,p+1} = n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} k^p}$.

II.3

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant p+1$.

$$\begin{aligned} S_{n,p+1} + nS_{n-1,p} &= n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}k^p + n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}k^p \quad \text{selon II.2,} \\ &= n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right)k^p \\ &= n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p \quad \text{d'après la formule de Pascal.} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \geqslant p+1,\ S_{n,p+1} + nS_{n-1,p} = nS_{n,p}}$.

II.4

Procédons par récurrence.

Initialisation : obtenue en I.1.
Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$.

- La question II.3 avec $n = p+1$ permet d'écrire $S_{p+1,p+1} + (p+1)S_{p,p} = (p+1)S_{p+1,p}$.
  On peut le réécrire $S_{p+1,p+1} + (-1)^p(p+1)! = 0$ ou encore $S_{p+1,p+1} = (-1)^{p+1}(p+1)!$.
- La question II.3 avec $n > p+1$ permet d'écrire $S_{n,p+1} + nS_{n-1,p} = nS_{n,p}$, soit $S_{n,p+1} + 0 = 0$ ou encore $S_{n,p+1} = 0$.

Ainsi $\mathcal{P}(p+1)$ soit vraie.

Le procédé de récurrence nous permet d'affirmer que $\boxed{\mathcal{P}(p) \text{ est vraie pour tout } p \in \mathbb{N}}$.

III.1

Par calcul de somme double, on a :

$$\begin{aligned} T_{n,p} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{p}a_ik^i \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}a_ik^i \\ &= \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a_ik^i \\ &= \sum_{i=0}^{p}a_i\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^i. \end{aligned}$$

On reconnaît $\boxed{T_{n,p} = \sum\limits_{i=0}^{p} a_iS_{n,i}}$.

III.2

Si $p < n$, pour $i \in [\![0,p]\!]$, $i \leqslant p < n$, donc selon II.4, $S_{n,i} = 0$ et $\boxed{T_{n,p} = 0}$.

Si $p = n$, dans la somme $\sum\limits_{i=0}^{p} a_iS_{n,i}$, seul le dernier terme $a_pS_{p,p}$ n'est pas nul et vaut $(-1)^pp!$ selon II.4.

Ainsi $\boxed{T_{p,p} = (-1)^pp!}$.

III.3

On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(k+t) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{p}a_i(k+t)^i \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{p}a_i\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}k^j t^{i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{p}a_i\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}t^{i-j}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^j \\
&= \sum_{i=0}^{p}a_i\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}t^{i-j}S_{n,j}
\end{aligned}$$

Dans cette dernière écriture, on observe que $S_{n,j}$ est toujours nul sauf si $j = i = p = n$.

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(k+t) = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } p < n; \\ (-1)^p p! a_p & \text{si } p = n. \end{array}\right.}$.

III.4

On a $\binom{p+k}{p} = \frac{(p+k)(p+k-1)\cdots(k+1)}{p!}$. De fait, en posant $P : t \mapsto \frac{1}{p!}t(t-1)\cdots(t-p+1)$, et en appliquant la relation précédente pour $t = p$, on obtient exactement $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{p+k}{p} = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } n > p, \\ (-1)^p & \text{si } n = p. \end{array}\right.}$

PROBLÈME 2

1.a

$\boxed{\varphi \text{ est indéfiniment dérivable sur } \mathbb{R}}$ en tant que produit de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
Et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = x(x+2)\,\mathrm{e}^x}$.

1.b

$\varphi'(x)$ est du signe de $x(x+2)$.
Par produit de limites, $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Par croissances comparées, $\varphi(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.
On obtient le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ	0	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

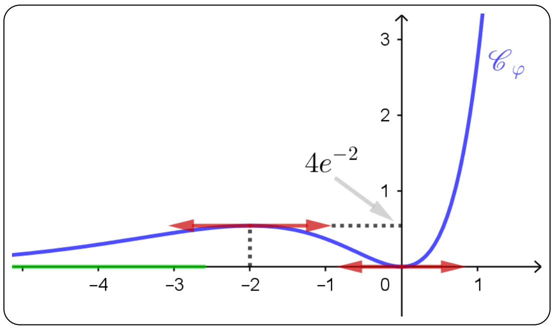
1.c

On sait que φ est convexe sur un intervalle I ***ssi*** $\forall x \in I,\ \varphi''(x) \geqslant 0$.
On calcule : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi''(x) = (x^2+4x+2)\,\mathrm{e}^x = (x-(-2+\sqrt{2}))(x-(-2-\sqrt{2}))\,\mathrm{e}^x$.
Ainsi, $\varphi''(x) \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, -2-\sqrt{2}] \cup [-2+\sqrt{2}, +\infty[$.
On en conclut que $\boxed{\varphi \text{ est convexe sur }]-\infty,-2-\sqrt{2}] \text{ et } [-2+\sqrt{2},+\infty[\text{ et concave sur } [-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}]}$.
Par conséquent, en nommant $\mathscr{C}_\varphi$ la courbe de φ et $\mathcal{T}_a$ la tangente à $\mathscr{C}_\varphi$ au point d'abscisse a :

- $\mathscr{C}_\varphi$ est au-dessus de $\mathcal{T}_0$ sur $[-2,+\infty[$; compte tenu du tableau de variations de φ, on peut même dire que $\boxed{\mathscr{C}_\varphi \text{ est toujours au-dessus de } \mathcal{T}_0}$.
- $\boxed{\mathscr{C}_\varphi \text{ est au-dessous de } \mathcal{T}_{-2} \text{ sur }]-\infty, 0]}$, et on ne peut pas dire beaucoup plus...
- $\boxed{\mathscr{C}_\varphi \text{ traverse } \mathcal{T}_{-2-\sqrt{2}} \text{ et } \mathcal{T}_{-2+\sqrt{2}}}$.

1.d

On obtient l'allure de la courbe représentative de φ. On a représenté les deux tangentes horizontales et l'asymptote en $-\infty$.



1.e

- Selon 1.b, pour tout x réel, $\varphi(x) \geqslant 0$. Donc, $\boxed{\text{si } y<0, \text{ l'équation } y=\varphi(x) \text{ n'admet aucune solution}}$.
- Si $y=0$, on a : $\varphi(x)=0 \iff x^2\,\mathrm{e}^x = 0 \iff x=0$. $\boxed{\text{L'équation } 0=\varphi(x) \text{ admet une unique solution}}$.
- Soit $y \in]0, 4\,\mathrm{e}^{-2}[$.
  - φ est strictement croissante et continue sur $]-\infty,-2[$, $\varphi(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\varphi(x) \underset{x\to-2}{\longrightarrow} 4\,\mathrm{e}^{-2}$. D'après le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de $]-\infty,-2[$ sur $]0, 4\,\mathrm{e}^{-2}[$.
  - En faisant de même sur $[-2,0]$ et sur $]0,+\infty[$, on obtient l'existence d'un unique antécédent sur chacun de ces intervalles.

  Bilan : $\boxed{\text{si } y \in]0,4\,\mathrm{e}^{-2}[, \text{ l'équation } y=\varphi(x) \text{ admet trois solutions}}$.

- $\boxed{\text{Si } y = 4\,\mathrm{e}^{-2}, \text{ l'équation } y=\varphi(x) \text{ admet exactement deux solutions}}$: -2 et une solution dans $\mathbb{R}^{+*}$ par application du théorème de la bijection sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\boxed{\text{Si } y \in]4\,\mathrm{e}^{-2}, +\infty[, \text{ l'équation } y=\varphi(x) \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}}$: aucune sur $\mathbb{R}^-$ puisque, si $x \in \mathbb{R}^-$, $\varphi(x) \leqslant 4\,\mathrm{e}^{-2} < y$; et une sur $\mathbb{R}^{+*}$ par application du théorème de la bijection.

1.f

$\boxed{\text{La fonction } \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ n'est pas injective}}$ puisque $4\,\mathrm{e}^{-2}$ admet deux antécédents.
$\boxed{\text{Elle n'est pas surjective}}$ puisque -1 n'a pas d'antécédent.

1.g

φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$; $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc, d'après le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. En conséquence :

$$\boxed{\text{il existe une unique fonction } \psi \text{ définie sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ telle que, } \forall x \in \mathbb{R}^{+*} : \varphi(\psi(x)) = x \text{ et } \psi(\varphi(x)) = x.}$$

2.a

$\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc, par composition, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Par addition, $\boxed{f_a(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty}$.
$\frac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$, donc, par la même démarche, $\boxed{f_a(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0}$.
$\boxed{\text{Le graphe de } f_a \text{ admet donc une asymptote verticale en } 0^+}$.

2.b

$\boxed{f_a \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables.
Et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_a'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + a$, soit $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_a'(x) = -\varphi\left(\frac{1}{x}\right) + a}$.
Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\boxed{f_a'(x) < 0 \iff -\varphi\left(\frac{1}{x}\right) + a < 0 \iff \varphi\left(\frac{1}{x}\right) > a}$.

3.a

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} f_a'(x) < 0 &\iff \varphi\left(\frac{1}{x}\right) > a && \text{selon 2.b,} \\ &\iff \frac{1}{x} > \psi(a) && \text{en appliquant } \psi \text{ qui est strictement croissante, comme bijection réciproque de } \varphi, \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}, \\ &\iff x < \frac{1}{\psi(a)} && \text{car } \tfrac{1}{x} > 0 \text{ et } \psi(a) > 0, \text{ et que la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f_a \text{ est strictement décroissante sur } \left]0, \frac{1}{\psi(a)}\right[\text{ et strictement croissante sur } \left]\frac{1}{\psi(a)}, +\infty\right[}$.

3.b

Soit $y > f_a\left(\frac{1}{\psi(a)}\right)$:

- f_a est strictement décroissante continue sur $\left]0, \frac{1}{\psi(a)}\right[$, $f_a(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $f_a(x) \underset{x\to \frac{1}{\psi(a)}}{\longrightarrow} f_a\left(\frac{1}{\psi(a)}\right)$.

  Donc, d'après le théorème de la bijection, y admet exactement un antécédent par f_a dans $\left]0, \frac{1}{\psi(a)}\right[$.
- f_a est strictement croissante continue sur $\left]\frac{1}{\psi(a)}, +\infty\right[$, $f_a(x) \underset{x\to \frac{1}{\psi(a)}}{\longrightarrow} f_a\left(\frac{1}{\psi(a)}\right)$ et $f_a(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par somme.

  Donc, d'après le théorème de la bijection, y admet exactement un antécédent par f_a dans $\left]\frac{1}{\psi(a)}, +\infty\right[$.

Finalement, y admet au moins deux antécédents distincts dans $\mathbb{R}^*$, donc $\boxed{f_a : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \text{ n'est pas injective}}$.

4.a

D'après la question 2.(a), pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f_a'(x) < 0 \iff \varphi\left(\frac{1}{x}\right) > a$.
Or, selon 1.(b), pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \geqslant a$.
De fait, on a nécessairement $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_a'(x) < 0$: $\boxed{f_a \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{-*} \text{ et sur } \mathbb{R}^{+*}}$.

4.b

➢ <u>Cas $a=0$</u> : par composition, $f_0(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$ et $f_0(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où le tableau de variations de f_0 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	‖	$-$	
f_0	1	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	1

f_a est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc d'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{f_a \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}^{-*} \text{ l'intervalle } I_1=f_a(\mathbb{R}^{-*})=]0,1[}.$$

De même, f_a est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc d'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{f_a \text{ réalise donc une bijection de } \mathbb{R}^{+*} \text{ l'intervalle } I_2=f_a(\mathbb{R}^{+*})=]1,+\infty[}.$$

➢ Cas $a<0$: par addition et composition, $f_a(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f_a(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. On obtient le tableau de variations de f_a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	‖	$-$	
f_a	$+\infty$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

f_a est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc d'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{f_a \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}^{-*} \text{ l'intervalle } I_1=f_a(\mathbb{R}^{-*})=\mathbb{R}^{+*}}.$$

De même, f_a est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc d'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{f_a \text{ réalise donc une bijection de } \mathbb{R}^{+*} \text{ l'intervalle } I_2=f_a(\mathbb{R}^{+*})=\mathbb{R}}.$$

4.c

Si $a<0$, alors le nombre 1 admet exactement deux antécédents, l'un dans $\mathbb{R}^{-*}$ l'autre dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Donc $\boxed{f_a:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R} \text{ n'est pas injective}}$.

4.d

D'après le tableau de variations ci-dessus, comme f_0 est continue sur $\mathbb{R}^*$, $f_0(\mathbb{R}^*)=]0,1[\cup]1,+\infty[$. -1 n'admet pas d'antécédent par f_0 dans $\mathbb{R}^*$, donc $\boxed{f_0 \text{ n'est pas surjective}}$.

4.e

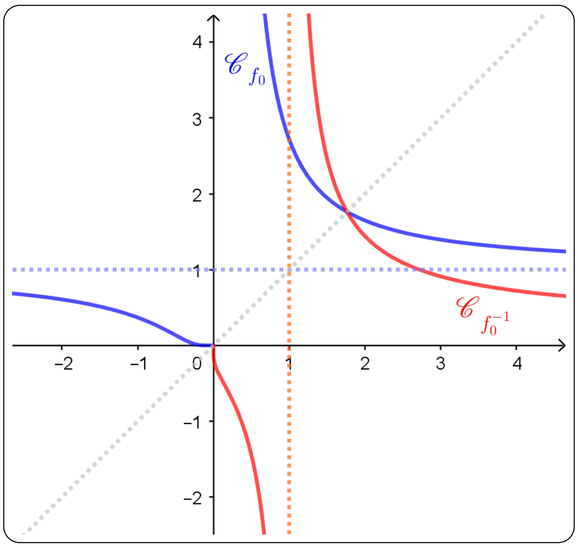
Comme précédemment, le théorème de la bijection permet de montrer que $f_0:\mathbb{R}^{-*}\to]0,1[$ est bijective et que $f_0:\mathbb{R}^{+*}\to]1,+\infty[$ aussi. De fait, $\boxed{f_0:\mathbb{R}^*\to E=]0,1[\cup]1,+\infty[\text{ est bijective}}$.

4.f

Soit $y\in E$. Pour $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $f_0(x)=y \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=y \iff \frac{1}{x}=\ln(y) \iff x=\frac{1}{\ln(y)}$.
Ainsi, $\boxed{\forall y\in E,\ f_0^{-1}(y)=\frac{1}{\ln(y)}}$.

4.g

On sait que les courbes représentatives de f_0 et def_0^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.



$\mathscr{C}_{f_0}$
$\mathscr{C}_{f_0^{-1}}$
4
3
2
1
0
−1
−2
−2
−1
1
2
3
4

★ ★ ★