

Préambule

Durée : 2h00.

Les calculatrices **sont interdites** pour cette épreuve.

Vous apporterez le plus grand soin à la rigueur et à la rédaction de vos réponses. Vous êtes invités à **encadrer** vos réponses et à les **numéroter complètement** (la première question de l'exercice 2 est numérotée **1.a**).

Le sujet est composé de trois questions de cours, de quatre savoir-faire et de trois exercices, qui sont tous largement indépendants.

COURS

Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Donner la définition et deux caractérisations de l'assertion : f est injective.
2. Définir la bijection réciproque de f . *On donnera au préalable l'hypothèse faite sur f pour définir cette fonction.*
3. Énoncer le théorème (complet) de neutralisation.

SAVOIR-FAIRE DU COURS

1. Pour $i \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, on note $R_i = \{x \in \mathbb{Z}, x \equiv i[10]\}$. Montrer que la famille $(R_i)_{i \in \llbracket 0, 9 \rrbracket}$ est une partition de $\mathbb{Z}$.
2. Considérons la fonction :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x \end{array} \right.$$

- (a) Déterminer l'image directe par g de $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [-2, 2]$, $A_3 = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, $A_4 = [-2, -1] \cup]2, 3[$.
 - (b) Déterminer l'image réciproque par g de $B_1 = [0, 6]$, $B_2 = \left[-\frac{3}{8}, 0\right]$, $B_3 = \left[-\frac{3}{8}, 6\right]$.
3. Soient E, F, G, H quatre ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que f , g et h sont bijectives.

EXERCICE 1

Résoudre les équations d'inconnue réelle x suivantes :

- $(E_1) \sqrt{x^2 - 2} = x - 1$;
- $(E_2) \sqrt{x^2 - 2} = |x| - 1$.

EXERCICE 2

L'objectif de cet exercice est d'étudier les connecteurs logiques unaires et binaires.

Pour toute assertion $\mathcal{P}$, on note usuellement $\neg \mathcal{P}$ la *négation* de $\mathcal{P}$. Le connecteur logique $\neg$ est un connecteur unaire. Pour tout couple d'assertions $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, on note $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ (*conjonction*), $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ (*disjonction*), $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$ (*implication*) et $\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \mathcal{P}_2$ (*équivalence*) les assertions associées aux quatre connecteurs logiques binaires usuels.

Deux connecteurs c_1 et c_2 sont dits *égaux* lorsque, pour tout couple d'assertions $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, les assertions $\mathcal{P}_1 c_1 \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_1 c_2 \mathcal{P}_2$ sont *logiquement équivalentes* (ou ont même table de vérité), ce que l'on note usuellement $\mathcal{P}_1 c_1 \mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P}_1 c_2 \mathcal{P}_2$.

Le système des cinq connecteurs logiques $(\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$ est appelé dans tout l'exercice *système élémentaire*.

On dit qu'un système de connecteurs logiques *permet d'écrire* un autre connecteur logique lorsque celui-ci peut s'écrire uniquement avec les connecteurs dudit système.

Par exemple, le système $(\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow)$ permet d'écrire le connecteur $\Leftrightarrow$ puisque, pour tout couple d'assertions $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$:

$$\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \mathcal{P}_2 \equiv (\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2) \wedge (\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_1).$$

On dit qu'un système de connecteurs logiques est *complet* lorsqu'il permet d'écrire tous les connecteurs binaires.

1. Dans cette question, on considère deux assertions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

(a) Écrire l'assertion $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$ en utilisant $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et le système $(\neg, \wedge, \vee)$.

(b) On définit la *disjonction exclusive* $\oplus$ par la table de vérité ci-dessous :

$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Prouver que $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \equiv (\mathcal{P}_1 \wedge (\neg \mathcal{P}_2)) \vee ((\neg \mathcal{P}_1) \wedge \mathcal{P}_2)$.

(c) On propose le tableau suivant, dans lequel sont répertoriées les tables de vérité de quelques connecteurs logiques binaires, notés $\textcircled{i}$ pour $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$.

$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \textcircled{1} \mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \textcircled{2} \mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \textcircled{3} \mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \textcircled{4} \mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \textcircled{5} \mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \textcircled{6} \mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \textcircled{7} \mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \textcircled{8} \mathcal{P}_2$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Pour tout $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$, donner une écriture de $\mathcal{P}_1 \textcircled{i} \mathcal{P}_2$ à l'aide de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et du système élémentaire.

2. Combien existe-t-il de connecteurs logiques binaires différents ?

3. Dédurre des questions précédentes que le système élémentaire est complet.

4. Justifier que les systèmes $(\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow)$ et $(\neg, \wedge, \vee)$ sont complets.

5. Montrer que le système $(\neg, \wedge)$ permet d'écrire le connecteur $\vee$ et en déduire que le système $(\neg, \wedge)$ est complet.

6. Le système $(\neg, \vee)$ est-il complet ?

7. On définit le connecteur binaire $\uparrow$ en posant, pour tout couple d'assertions $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, $\mathcal{P}_1 \uparrow \mathcal{P}_2 \equiv \neg(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2)$.

Montrer que le connecteur $\uparrow$ est *universel*, c'est-à-dire que le système formé du seul connecteur $\uparrow$ est complet.

EXERCICE 3

On pose $C_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-2} C_2 + C_{n-1} C_1 + C_n C_0 \\ &= \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}. \end{aligned}$$

1. Calculer C_n pour $n \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

2. Montrer, par récurrence forte, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer, par récurrence simple, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \geq 2^{n-1}$.

4. Montrer, par récurrence forte, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \geq 3^{n-2}$.

5. A-t-on $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \geq 4^{n-2}$?