MATH

Devoir à la Maison n°9

MPSI 14/03/2025

EXERCICE

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H} = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$, $E_{i,j}$ désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de place (i,j) qui vaut 1. Étant donnée une partie $\mathcal{F}$ de E, on note $\mathscr{C}(\mathcal{F})$ l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{F}$:

$$\mathscr{C}(\mathcal{F}) = \{A \in E,\ \forall M \in \mathcal{F},\ AM = MA\}.$$

Si $\mathcal{F}$ ne contient qu'un seul élément f, on note simplement $\mathscr{C}(f) = \mathscr{C}(\mathcal{F})$.

1. Soit $\mathcal{F}$ une partie de E. Montrer que $\mathscr{C}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Dans cette question, on cherche à déterminer $\mathscr{C}(E)$.
   (a) Soit $A \in \mathscr{C}(E)$.
      i. Calculer, pour tout $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$, $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.
      ii. En déduire que $A \in \mathcal{H}$.
   (b) Conclure quant à $\mathscr{C}(E)$.
3. On note $\mathcal{G}$ la partie de E formée des matrices inversibles.
   (a) Montrer que, pour tout $M \in E$, il existe deux matrices P et Q inversibles vérifiant $M = P + Q$.
   Indication : on pourra décomposer M en somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure.
   (b) En déduire que $\mathscr{C}(\mathcal{G}) = \mathcal{H}$.
4. On fixe une matrice D de E diagonale dont les éléments sur la diagonale sont deux à deux distincts.
   (a) Montrer que $\mathscr{C}(D)$ est égal à l'ensemble des matrices diagonales de E. En déduire sa dimension.
   (b) Justifier que $\mathrm{Vect}((D^k)_{k\in\mathbb{N}}) \subset \mathscr{C}(D)$.
   (c) Montrer que $(D^k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est une famille libre de E et en déduire que c'est une base de $\mathscr{C}(D)$.
5. Dans cette question, on suppose $n = 3$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathscr{C}(D)$ et sa dimension.