

Préambule

Objectifs : être à jour à le rentrée des vacances de février.

Chapitre 16

COURS. Réviser son cours. Puis répondre aux questions suivantes :

- Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - ✧ Définir $a \mid b$.
 - ✧ La relation de divisibilité est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$? sur $\mathbb{N}$? sont-elles totales?
 - ✧ Que signifie l'expression « la relation de divisibilité respecte les combinaisons linéaires entières »?
 - ✧ Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Donner une valeur du quotient à l'aide de la partie entière.
 - ✧ Définir $a \equiv b [n]$.
 - ✧ La relation de congruence est une relation d'équivalence : rappeler la définition. Quelles sont les classes d'équivalence? Combien en existe-t-il de différentes? Les expliciter.
 - ✧ Énoncer cinq propriétés fondamentales de la relation de congruence.
 - ✧ Relier par équivalences les trois relations précédentes : divisibilité, reste dans la division euclidienne, congruence.
- Définir nombre premier. Combien en existe-t-il? Comment faire pour trouver tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 150?
- PGCD.
 - ✧ Définir $a \wedge b$ comme le plus grand élément de $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$: au sens de la relation $\leq$? au sens de la relation $\mid$? Cas particuliers.
 - ✧ Que signifie l'expression « le pgcd est insensible au signe »?
 - ✧ Énoncer le lemme d'Euclide et l'algorithme d'Euclide.
 - ✧ Énoncer la relation de Bézout et être capable de dérouler l'algorithme d'Euclide étendu pour trouver une relation de Bézout.
- Cas particulier des entiers premiers entre eux.
 - ✧ Définir nombres premiers entre eux; savoir se ramener à ce cas dans le cas général.
 - ✧ Énoncer le théorème de Bachet-Bézout.
 - ✧ Donner une CNS pour qu'un entier soit premier avec un produit.
 - ✧ Énoncer le lemme de Gauss.
 - ✧ Donner une condition suffisante pour dire qu'un produit d'entiers divise un entier donné.
 - ✧ Donner une condition suffisante pour dire qu'un entier divise un produit d'entiers.
- Énoncer le petit théorème de Fermat et sa version « simplifiée ».
- PGCD.
 - ✧ Définir $a \vee b$ comme le plus petit élément de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}^*$: au sens de la relation $\leq$? au sens de la relation $\mid$? Cas particuliers.
 - ✧ Que signifie l'expression « le ppcm est insensible au signe »?
 - ✧ Relier le pgcd et le ppcm de deux entiers.
 - ✧ Énoncer la relation de Bézout et être capable de dérouler l'algorithme d'Euclide étendu pour trouver une relation de Bézout.
- PGCD de plusieurs entiers.
 - ✧ Donner un exemple de calcul de pgcd et de ppcm de trois nombres.
 - ✧ Définir nombres premiers entre eux dans leur ensemble. Donner un exemple de trois nombres qui sont premiers entre eux dans leur ensemble sans être premiers entre eux deux à deux.

- Valuation p -adique si p est premier.
 - ✧ Définir la valuation p -adique d'un entier non nul.
 - ✧ Valuation d'un produit. Lien avec la divisibilité.
 - ✧ Écriture d'un PGCD et d'un PPCM.
 - ✧ Énoncer le théorème de décomposition en produit de facteurs premiers.

SAVOIR-FAIRE. Connaître sur le bout des doigts tout le cours et tous les exemples ♥.

EXERCICES. Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

Chapitre 17

COURS. Réviser son cours. Puis répondre aux questions suivantes :

- Définir chaque mot de vocabulaire : loi de composition interne, stabilité d'une partie, loi induite, associativité, commutativité, élément neutre, élément inversible, inverse, élément absorbant.
- Calcul dans un monoïde.
 - ✧ Définir monoïde.
 - ✧ Connaître l'inverse d'une composée d'éléments inversibles.
 - ✧ Énoncer les deux propriétés de simplification (à droite et à gauche) par un élément inversible.
 - ✧ Définir les itérés d'un élément ; ainsi que le cas particulier d'un élément inversible.
- Groupe.
 - ✧ Définir groupe, groupe abélien.
 - ✧ Donner 8 exemples usuels de groupes additifs ; 8 exemples usuels de groupes multiplicatifs ; un exemple de groupe pour la composition.
 - ✧ Définir et énoncer le théorème associé à un groupe produit.
 - ✧ Donner la caractérisation de sous-groupe d'un groupe.
 - ✧ Définir et énoncer le théorème associé à un sous-groupe engendré par un élément.
 - ✧ Que dire d'une intersection de sous-groupes ? d'une union de sous-groupes ?
 - ✧ Définir morphisme de groupes, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
 - ✧ Pour un morphisme de groupes, que dire de l'image du neutre ? de l'image d'un inverse ? de l'image directe d'un sous-groupe ? de l'image réciproque d'un sous-groupe ?
 - ✧ Définir le noyau d'un morphisme de groupes. Donner sa structure algébrique ainsi que le théorème de caractérisation de l'injectivité.
 - ✧ Que dire de la bijection d'un isomorphisme de groupes ?
- Anneau.
 - ✧ Définir anneau, anneau commutatif, anneau intègre. Comment est noté son neutre additif ? son neutre multiplicatif ?
 - ✧ Donner 5 exemples usuels d'anneaux.
 - ✧ Calculs dans un anneau : savoir que 0_A est absorbant ; énoncer les formules du binôme et de factorisation.
 - ✧ Énoncer la propriété de simplification dans un anneau intègre.
 - ✧ Donner la caractérisation de sous-anneau d'un anneau.
 - ✧ Définir le groupe des inversibles d'un anneau. Comment le note-t-on ? Quelle structure algébrique possède-t-il ?
 - ✧ Définir morphisme d'anneaux.
- Corps.
 - ✧ Définir corps. Possède-t-il la propriété d'intégrité ? de commutativité ?
 - ✧ Donner 3 exemples usuels de corps.

SAVOIR-FAIRE. Connaître sur le bout des doigts tout le cours et tous les exemples ♥.

EXERCICES. Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

Chapitre 6

COURS. Réviser son cours. Puis répondre aux questions suivantes :

- Définir la forme algébrique et la forme trigonométrique d'un nombre complexe. Tout complexe en admet-il une de chaque?
- Parties réelle Re et imaginaire Im d'un complexe.
 - ✧ Caractériser l'égalité de deux complexes à l'aide de Re et Im .
 - ✧ Énoncer les caractérisations des réels et des imaginaires purs.
 - ✧ Re et Im respectent-elles $+$? $-$? $\times$? $/$?
- Conjugué d'un complexe.
 - ✧ Énoncer les caractérisations des réels et des imaginaires purs.
 - ✧ La conjugaison respecte-t-elle $+$? $-$? $\times$? $/$?
 - ✧ Savoir ce que signifie : la conjugaison est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$.
- Module d'un complexe.
 - ✧ Donner 3 définitions équivalentes : à l'aide des parties réelle et imaginaire; à l'aide du conjugué; en tant que distance.
 - ✧ Définir cercle, disques ouvert et fermé, connaissant le centre et le rayon.
 - ✧ Le module respecte-t-il $+$? $-$? $\times$? $/$?
 - ✧ Énoncer l'inégalité triangulaire. Connaître la caractérisation du cas d'égalité.
- L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
 - ✧ Que désigne l'ensemble $\mathbb{U}$? Comment peut-on le paramétriser?
 - ✧ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Définir $e^{i\theta}$. Qu'est son module? son inverse? son conjugué? Que dire du produit de deux nombres de cette forme?
 - ✧ En quoi consiste la « technique de l'angle moitié »?
 - ✧ Énoncer les formules d'Euler et de Moivre.
- Argument d'un complexe non nul.
 - ✧ Définir argument d'un complexe non nul. Est-il unique? Pourquoi dit-on qu'il est unique à 2π -près?
 - ✧ Caractérisations des réels et des imaginaires purs.
 - ✧ Donner un argument : du conjugué; de l'opposé; de l'inverse; du produit; du quotient; de la puissance entière.
- Plan complexe.
 - ✧ Être capable de représenter un point dans le plan complexe en connaissant son affixe; en connaissant son module et un argument; idem pour un vecteur.
 - ✧ Connaître l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{MM'}$; l'affixe d'une somme de vecteurs; caractériser la colinéarité de deux vecteurs.
 - ✧ Cercle et disque.
- Équations algébriques.
 - ✧ Savoir comment obtenir la forme algébrique des racines carrées d'un complexe.
 - ✧ Savoir résoudre une équation polynomiale du second degré à coefficients complexes.
- Racines n -èmes. Définir et connaître l'expression générale des racines n -èmes de l'unité. Connaître leur somme. Savoir déduire l'expression générale des racines d'un complexe non nul quelconque.
- Fonction exponentielle complexe.
 - ✧ Définir e^z pour $z \in \mathbb{C}$.
 - ✧ Peut-on dire que $z \mapsto e^z$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$? Est-il injectif? surjectif?
- Transformations du plan complexe : savoir coder une translation, une homothétie, une rotation; et plus généralement une similitude directe.

SAVOIR-FAIRE. Connaître sur le bout des doigts tout le cours et tous les exemples ♥.

EXERCICES. Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

Chapitre 18

COURS. Réviser son cours. Puis répondre aux questions suivantes :

- Définir polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$: définition comme suite nulle APCR. Savoir introduire P sous forme sommatoire.
- Savoir que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif. Est-il intègre? Est-ce un corps?
- Définir le degré d'un polynôme. Que dire du degré d'une somme? d'un produit?
- Définir $\mathbb{K}_n[X]$.
- Formule de Leibniz et de Taylor pour les polynômes.
- Divisibilité.
 - ✧ Définir : un polynôme divise un autre polynôme.
 - ✧ Que signifie l'expression « la divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$ respecte les combinaisons linéaires polynomiales »?
- Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
- Définir et caractériser à l'aide de la divisibilité : $a \in \mathbb{K}$ est racine d'un polynôme P .
- Multiplicité d'une racine. Soit $m \in \mathbb{N}$.
 - ✧ Définir : a est racine de multiplicité m de P .
 - ✧ Énoncer une caractérisation avec les dérivées successives.
 - ✧ Que dire dans le cas particulier d'une racine complexe d'un polynôme à coefficients réels?
- Définir polynôme scindé dans $\mathbb{K}$. Énoncer le théorème de D'Alembert-Gauss.
- Combien de racines complexes possède un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$? *On fera une réponse avec l'expression « comptées avec leur ordre de multiplicité » et une sans.*
- Même question pour les racines complexes possède un polynôme de degré n de $\mathbb{R}[X]$; et pour ses racines réelles.
- Énoncer les relations coefficients-racines pour la somme et le produit des racines d'un polynôme. Retrouver celle pour la somme des produits de deux racines.
- Considérons n scalaires distincts x_i et n scalaires y_i .
 - ✧ Définir les polynômes élémentaires de Lagrange L_i .
 - ✧ Énoncer le théorème d'interpolation de Lagrange.

SAVOIR-FAIRE. Connaître sur le bout des doigts tout le cours et tous les exemples ♥.

EXERCICES. Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

Chapitre 20

COURS. Réviser son cours. Puis répondre aux questions suivantes :

- Brève initiation à l'arithmétique des polynômes :
 - ✧ Définir polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$. Quels sont les irréductibles dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$?
 - ✧ Définir le PGCD et le PPCM de deux polynômes.
 - ✧ Énoncer le lemme d'Euclide; l'algorithme d'Euclide.
 - ✧ Énoncer la relation de Bézout.
 - ✧ Définir polynômes premiers entre eux.
 - ✧ Énoncer le théorème de Bachet-Bézout.
 - ✧ Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme soit premier avec un produit de polynômes.
 - ✧ Énoncer le lemme de Gauss.
 - ✧ Donner une condition suffisante pour qu'un produit de polynômes divise un polynôme donné.
- Fractions rationnelles.
 - ✧ Qu'appelle-t-on le corps des fractions rationnelles? Qu'appelle-t-on l'écriture irréductible d'une fraction rationnelle?

- ✧ Définir le vocabulaire : degré, zéros, pôles, partie entière d'une fraction rationnelle.
- ✧ Énoncer les théorèmes de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- ✧ Connaître la technique du cache dans le cas d'un pôle simple. Peut-elle permettre de trouver de coefficients dans d'autres cas ? Énoncer également la version spécifique utilisant la dérivée du dénominateur.
- ✧ Savoir utiliser la parité dans une décomposition en éléments simples.
- ✧ Savoir utiliser la limite dans une décomposition en éléments simples.

SAVOIR-FAIRE. Connaître sur le bout des doigts tout le cours et tous les exemples ♥.

EXERCICES. Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

EXERCICE 1

Soit $p \in \mathbb{P}$. On note $\mathbb{Z}_p = \left\{ \frac{a}{b}, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, p \wedge b = 1 \right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Soit $x \in \mathbb{Q}^*$. Montrer que $x \in \mathbb{Z}_p$ ou $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}_p$.
3. Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Z}_p$. Montrer que $B = \mathbb{Z}_p$ ou $B = \mathbb{Q}$.

PROBLÈME - La partie II est FACULTATIVE

Partie I. Polynômes de Tchebychev

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$.

1. Déterminer T_0, T_1, T_2 et T_3 .
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser le degré et le coefficient dominant de T_n .
3. Prouver que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. On pourra observer que $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.
4. En déduire que, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $T_n \circ T_m = T_{nm}$.

Partie II. Le théorème de Block et Thielmann

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\mathcal{C}(P)$ l'ensemble des polynômes non constants de $\mathbb{R}[X]$ qui commutent avec P pour la relation $\circ$.

On appelle *suite commutante* toute suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(P_n) = n \quad \text{et} \quad \forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, P_m \circ P_n = P_n \circ P_m.$$

1. Montrer que les suites $(X^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont commutantes.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.
 - (a) Montrer que tout élément de $\mathcal{C}(X^2 + \alpha)$ est unitaire.
 - (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}(X^2 + \alpha)$ contient au plus un élément de degré n .
 - (c) Montrer que, si $\mathcal{C}(X^2 + \alpha)$ contient un élément de degré 3, alors $\alpha \in \{-2, 0\}$.
 - (d) Montrer que $\mathcal{C}(X^2) = \{X^n, n \in \mathbb{N}^*\}$.
3. Soit $U \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que U est inversible dans $\mathbb{R}[X]$ pour la relation $\circ$ si, et seulement si, son degré vaut 1. Identifier dans ce cas son inverse, que l'on notera U^{-1} .

4. Soient $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite commutante et $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1. Montrer que $(U \circ P_n \circ U^{-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est encore une suite commutante.
5. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq 0$. On pose $P = aX^2 + bX + c$ et $U = aX + \frac{b}{2}$.
Prouver qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $U \circ P \circ U^{-1} = X^2 + \alpha$.
6. Trouver un polynôme $V \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que $V \circ (X^2 - 2) \circ V^{-1} = T_2$.
7. Prouver enfin que les seules suites commutantes de $\mathbb{R}[X]$ sont les $(U \circ X^n \circ U^{-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et les $(U \circ T_n \circ U^{-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour U polynôme de degré 1.