MATH

Devoir à la Maison n°6

MPSI 06/01/2025

Préambule

Objectifs : être à jour à la rentrée des vacances de Noël.

Chapitre 10

COURS. Réviser son cours. Puis répondre aux questions suivantes :

- ➢ Définir la borne supérieure/inférieure d'un ensemble et énoncer le théorème associé dans $\mathbb{R}$.
- ➢ Définir la droite achevée, être capable de donner le prolongement des opérations.
- ➢ Définir intervalle de $\mathbb{R}$.
- ➢ HP : définir voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$; point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$; point intérieur à une partie de $\mathbb{R}$.
- ➢ Définir partie dense de $\mathbb{R}$. Savoir que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

SAVOIR-FAIRE. Connaître sur le bout des doigts tout le cours et tous les exemples ♥.
EXERCICES. Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

Chapitre 11

COURS. Réviser son cours. Puis répondre aux questions suivantes :

- ➢ Vocabulaire élémentaire des suites : terme général, rang, à partir d'un certain rang, suite stationnaire, suite extraite.
- ➢ Donner trois méthodes générales pour l'étude de la monotonie d'une suite.
- ➢ Définition de la limite d'une suite : limite finie ou infinie.
- ➢ Savoir que la limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique.
- ➢ Faire le lien entre « la suite u est convergente » et « la suite u est bornée ».
- ➢ Connaître les opérations algébriques sur les limites ainsi que la composition. *Et savoir qu'il n'y a aucune opérations sur les exposants non constants.*
- ➢ Établir une information *à partir d'un certain rang* pour une suite qui tend vers $\ell > a$.
- ➢ Énoncer le théorème de passage à la limite dans une inégalité large. *Et avoir compris qu'il n'y a pas de passage à la limite dans une inégalité stricte.*
- ➢ Énoncer le théorème des suites monotones.
- ➢ Énoncer les théorèmes d'encadrement. *Et savoir quoi faire du produit d'une suite de limite nulle et d'une suite bornée.*
- ➢ Définir suites adjacentes et citer le théorème associé.
- ➢ Donner la limite de (x^n) selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{C}$.
- ➢ Énoncer les croissances comparées.
- ➢ Connaître les méthodes élémentaires sur l'étude des suites itératives, vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
  - ✧ Définir intervalle stable par une fonction et savoir en trouver un pour f.
  - ✧ Savoir visualiser une telle suite sur le graphe de f.
  - ✧ Savoir trouver les limites finies éventuelles d'une telle suite.
  - ✧ Savoir quoi dire lorsque : f est croissante sur un intervalle stable ; f est décroissante sur un intervalle stable ; $f \geqslant \mathrm{Id}$ sur un intervalle stable ; $f \leqslant \mathrm{Id}$ sur un intervalle stable.
- ➢ Donner la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, de la densité.

- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

SAVOIR-FAIRE. Connaître sur le bout des doigts tout le cours et tous les exemples ♥.
EXERCICES. Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

Chapitre 12

COURS. Réviser son cours. Puis répondre aux questions suivantes :

- Définition de la limite finie ou infinie d'une fonction en un point fini ou infini.
- Définir limite à gauche et limite à droite. Faire le lien avec la notion générale de limite.
- Savoir que la limite d'une fonction en un point, lorsqu'elle existe, est unique.
- Faire le lien entre « la fonction f est convergente » et « la fonction f est bornée au voisinage du point considéré ».
- Connaître les opérations algébriques sur les limites ainsi que la composition. *Et savoir qu'il n'y a aucune opérations sur les exposants non constants.*
- Établir une information *au voisinage du point considéré* pour une fonction qui tend vers $\ell > a$.
- Énoncer le théorème de passage à la limite dans une inégalité large. *Et avoir compris qu'il n'y a pas de passage à la limite dans une inégalité stricte.*
- Énoncer le théorème des fonctions monotones.
- Énoncer les théorèmes d'encadrement. *Et savoir quoi faire du produit d'une fonction de limite nulle et d'une fonction bornée.*
- Énoncer le théorème de caractérisation séquentielle de la limite.
- Définir la continuité d'une fonction en un point.
- Définir la continuité à gauche et la continuité à droite. Faire le lien avec la notion générale de limite.
- Définir le fait qu'une fonction soit prolongeable par continuité en un point et savoir définir, dans ce cas, le prolongement associé.
- Connaître les opérations algébrique et la composition sur la continuité des fonctions.
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- Énoncer le théorème des bornes atteintes.
- Faire les liens entre injectivité et strictement monotonie d'une fonction, dans le cas de continuité ou non de la fonction.
- Énoncer le théorème de la bijection.

SAVOIR-FAIRE. Connaître sur le bout des doigts tout le cours et tous les exemples ♥.
EXERCICES. Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

Chapitre 13

COURS. Réviser son cours. Puis répondre aux questions suivantes :

- Définition et caractérisation pratique d'une suite (puis d'une fonction) négligeable devant une autre.
- Citer les propriétés fondamentales de la relation de négligeabilité.
- Avoir compris la notion de « niveau de précision » dans cette relation (et notamment, ce que fait $o(f(x))-o(f(x))$).
- Avoir compris qu'on ne peut pas composer à gauche par une fonction.
- Savoir caractériser le fait qu'une suite (ou une fonction) ait une limite nulle.
- Savoir énoncer les résultats de croissances comparées avec la notation $\ll$.
- Définition et caractérisation pratique d'une suite (puis d'une fonction) équivalente à une autre.
- Citer les propriétés fondamentales de la relation d'équivalence.
- Avoir compris que l'on ne peut pas sommer les équivalents (et être capable de donner un contre-exemple).

- Avoir compris qu'on ne peut pas composer à gauche par une fonction (et être capable de donner un contre-exemple).
- Savoir trouver instantanément un équivalent d'une suite (ou d'une fonction) de limite finie non nulle.
- Énoncer le théorème des gendarmes appliqué à la relation d'équivalence.
- Savoir que, pour trouver un équivalent d'une somme, on commence par chercher (s'il y en a un) le terme prépondérant.
- Savoir trouver instantanément un équivalent d'un polynôme en 0 et en $\pm\infty$.
- Énoncer les neuf équivalents usuels.
- Énoncer la formule de Stirling.
- Définition et caractérisation pratique d'une suite (puis d'une fonction) dominée par une autre.
- Savoir caractériser le fait qu'une suite (ou une fonction) soit localement bornée.

SAVOIR-FAIRE. Connaître sur le bout des doigts tout le cours et tous les exemples ♥.
EXERCICES. Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

EXERCICE 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{x^2+16}{2x}$.
L'objet de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telles que $f \circ \varphi = f$.
On considère une fonction f solution.

1. On pose $u_0 \in]4\,, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   Montrer que la suite (u_n) est bien définie, décroissante et convergente vers une limite à déterminer.
2. Établir un résultat analogue lorsque la suite $u_0 \in]0\,, 4]$.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = f(4)$.
4. Conclure quant au problème posé.

EXERCICE 2 - la Partie II est facultative

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle *somme de Cesàro* associée à u la suite c définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Partie I. Cas d'une suite admettant une limite

1. On suppose dans cette question que la suite u est convergente, de limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   (b) Prouver que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :
   $$|c_n - \ell| \leqslant \frac{|u_0 - \ell| + |u_1 - \ell| + \cdots + |u_{n_0-1} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$
   (c) En déduire que la suite c converge vers ℓ. *Ce résultat est appelé le lemme de Cesàro.*
2. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse, c'est-à-dire qu'on peut avoir c convergente sans que u converge.
3. Prouver que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Partie II. Applications

1. Soit u une suite de réels strictement positifs telle que $\exists \ell \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   Montrer, en utilisant la fonction logarithme, que $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
2. Soient a et b deux suites réelles convergentes. On pose :
   $$w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$
   Montrer que la suite w ainsi définie est convergente et déterminer sa limite.