MATH

Devoir à la maison n°5

Un corrigé

PROBLÈME

I.1

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.
En posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t$, on obtient de même que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = xf(x)$.
Par linéarité, on peut alors écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = 2x\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t = 2xF(x) - G(x)$.
Par opérations algébriques, on obtient que $\boxed{H \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Et $\forall x \in \mathbb{R},\ H'(x) = 2F(x) + 2xf(x) - xf(x)$ soit $\boxed{H'(x) = 2F(x) + xf(x)}$.

I.2

La relation (E) satisfaite par f s'écrit aussi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1 - H(x)$.
D'après la question I.1, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -H'(x) = -(2F(x) + xf(x))}$.

I.3

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- *Initialisation.* Immédiate.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors, F est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, puisque c'est une primitive de f. *A fortiori*, F est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, avec l'expression de f' trouvée à la question I.3, on peut affirmer que f' est également de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et l'hérédité est prouvée.

On en conclut que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.
En dérivant la relation obtenue à la question I.3, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -2f(x) - f(x) - xf'(x) \quad \text{soit } f''(x) + x'f(x) + 3f(x) = 0.$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$.
En conclusion, $\boxed{f \text{ est solution de } (P)}$.

I.4

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, $s \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0, z_0 \in \mathbb{C}$. Le système suivant, d'inconnue $y \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, est appelé problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + ay'(t) + by(t) = s(t) \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = z_0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Un tel problème admet une unique solution}}$.

II.1

En tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$:

- $y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$;
- $y'(x) = -xz(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + z'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$;
- $y''(x) = (x^2 - 1)z(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - 2xz'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + z''(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

On injecte :

$$\begin{aligned} y \text{ vérifie } (E') \quad &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\ 3z(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - xz'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + z''(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \\ &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) - xz'(x) + 3z(x) = 0 \quad \text{car } \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{y \text{ vérifie } (E') \textbf{\textit{ ssi }} z \text{ vérifie } (E'')}$.

II.2.a

Soit h une solution polynomiale non nulle. Notons $n \in \mathbb{N}$ son degré. Posons $h(x) = a_n x^n + P(x)$ où $a_n \in \mathbb{R}^*$ et P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Alors le coefficient en x^n de $x \mapsto -xz'(x)$ est $-na_n$, et z'' est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-2$. Ainsi, $z'' - xz' + 2z$ est une fonction polynomiale dont le coefficient en x^n est $(2-n)a_n$. Comme $a_n \neq 0$, on a $\boxed{n = 2}$.

II.2.b

On pose donc $z_P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. On injecte dans l'équation (E'') :

$$z_P \text{ vérifie } (E'') \iff \forall x \in \mathbb{R},\ bx + 2(c+a) = 0$$
$$\iff \begin{cases} b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les solutions polynomiales de } (E'') \text{ sont les fonctions } x \mapsto a(x^2-1), \text{ où } a \in \mathbb{R}}$.

II.3

D'après les questions II.1 et II.2.b, on déduit directement que $\boxed{\text{les fonctions } x \mapsto \lambda(x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \text{ sont solutions de } (E')}$.

III.1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $y_P : x \mapsto \lambda(x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Selon la question II.3, y_P est solution de (E'). Puis :

$$\begin{cases} y_P(0) = 1 \\ y_P'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } y_P : x \mapsto (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \text{ est solution de } (E')}$.

III.2

Procédons par analyse-synthèse.

- *Analyse.* Soit f une fonction continue vérifiant (E). Selon la partie I, f est donc solution du problème de Cauchy (P). Or, selon la question III.1, $x \mapsto (1-x^2)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ en est une aussi. Par unicité de la solution du problème de Cauchy (P), c'est que $f : x \mapsto (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
- *Synthèse.* Posons $f : x \mapsto (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
  - Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}$.
  - Il reste à voir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t)\ \mathrm{d}t$, soit $f(x) = -1 - 2x\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t$.
    Déjà, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -xf'(x) - 3f(x)$. Donc $\int_0^x f''(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^x (tf'(t) + 3f(t))\ \mathrm{d}t$.
    Donc $f'(x) - f'(0) = -\int_0^x tf'(t)\ \mathrm{d}t - 3\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Or, $f'(0) = 0$ et, par intégration par parties rapide :

    $$\int_0^x tf'(t)\ \mathrm{d}t = [tf(t)]_0^x - \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = xf(x) - \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

    Ainsi, $f'(x) = -xf(x) - 2\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$. À nouveau, il vient $\int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t - 2\int_0^x \int_0^t f(u)\ \mathrm{d}u$.
    Une nouvelle intégration par parties permet d'écrire :

    $$\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \left[t\int_0^t f(u)\ \mathrm{d}u\right]_0^x - \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t.$$

    Ainsi, $f(x) - f(0) = -\int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t - 2x\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + 2\int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t$.
    Comme $f(0) = -1$, on a en simplifiant : $f(x) + 1 = \int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t - 2x\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$, soit finalement :

    $$f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Pour résumer, $\boxed{f : x \mapsto (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \text{ est l'unique fonction continue solution de } (E)}$.

★ ★ ★