

EXERCICE

1.a

Écrivons w sous forme trigonométrique :

$$\begin{aligned} w &= -2 + 2i \\ &= 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{aligned}$$

Ainsi $w = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

1.b

Soit $z \in \mathbb{C} : (\mathcal{E}_1) \iff z^3 = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^3 \iff \left(\frac{z}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} \right)^3 = 1 \iff \frac{z}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} \in \mathbb{U}_3 = \left\{ 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$.

Les solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sont $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2} e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

1.c

En observant que $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, on lit instantanément dans la question précédente que :

les solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sont : $1 + i, (1 + i)j$ et $(1 + i)j^2$.

2.a

Comme $uv = 2$, on a $u^3 v^3 = 2^3 = 8$.

Par ailleurs, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} z^3 = (u + v)^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= u^3 + 3uv(u + v) + v^3 \\ &= u^3 + 6z + v^3 \end{aligned}$$

Or $z^3 - 6z = -4$, car z est solution de $\mathcal{E}$. Par conséquent, $u^3 + v^3 = -4$.

2.b

u^3 et v^3 sont les deux nombres de somme -4 et de produit 8 donc u^3 et v^3 sont solutions de $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.

2.c

L'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$ est du second degré, son discriminant est $\Delta = -16 = (4i)^2$, ses solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{-4 + 4i}{2} = -2 + 2i = w \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{w}.$$

Or, selon la question 1.b : $u^3 = w \iff u \in \left\{ \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2} e^{i\frac{19\pi}{12}} \right\}$.

De plus, en appliquant la conjugaison : $u^3 = \bar{w} \iff \bar{u}^3 = w \iff u \in \left\{ \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2} e^{-i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2} e^{-i\frac{19\pi}{12}} \right\}$.

Ainsi, u se trouve parmi les six valeurs précédentes. De plus, par symétrie des rôles de u et v , on peut dire que les valeurs possibles pour u et v sont dans l'ensemble :

$$E_1 = \left\{ \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2} e^{i\frac{19\pi}{12}}, \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2} e^{-i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2} e^{-i\frac{19\pi}{12}} \right\}.$$

2.d

On cherche ainsi z tel que :

$$\begin{cases} u + v &= z \\ uv &= 2 \end{cases} \quad \text{avec } u \text{ et } v \text{ appartenant à } E_1.$$

Or, $uv = 2$ implique que $\text{Arg}(uv) \equiv 0 [2\pi]$ soit $\text{Arg}(u) \equiv -\text{Arg}(v) [2\pi]$. En d'autres termes, u et v sont conjugués l'un de l'autre et il n'y a que trois cas possibles :

- soit $\{u, v\} = \{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\}$, et alors $z = \sqrt{2}(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{2} \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$;
- soit $\{u, v\} = \{\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{4}}\}$, et alors $z = \sqrt{2}(e^{i\frac{11\pi}{4}} + e^{-i\frac{11\pi}{4}}) = \sqrt{2} \times 2 \cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -1 - \sqrt{3}$;
- soit $\{u, v\} = \{\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{19\pi}{4}}\}$, et alors $z = \sqrt{2}(e^{i\frac{19\pi}{4}} + e^{-i\frac{19\pi}{4}}) = \sqrt{2} \times 2 \cos\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \sqrt{3} - 1$.

En conclusion, les solutions complexes de $(\mathcal{E})$ sont toutes réelles et sont 2 , $-1 - \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - 1$.

★ ★ ★