MATH

Devoir à la maison n°3

Un corrigé

EXERCICE 1

1

$\mathrm{ch}(1) = \mathrm{ch}(-1)$, or $1 \neq -1$. Donc $\boxed{\text{ch n'est pas injective donc pas bijective}}$.
ch est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
D'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{ch réalise une bijection de } \mathbb{R}^+ \text{ dans } J = [f(0), \lim\limits_{+\infty} f[= [1, +\infty[}$.

2

Soit $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times J$. On résout l'équation $x = \mathrm{ch}(t)$:

$$\begin{aligned}
x = \mathrm{ch}(t) &\iff \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} = 2x \\
&\iff T^2 - 2xT + 1 = 0 \quad \text{en posant } T = \mathrm{e}^t, \\
&\iff T = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{en calculant le discriminant } \Delta = 4(x^2 - 1) \geqslant 0, \\
&\iff \mathrm{e}^t = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \\
&\iff t = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad \text{car } x + \sqrt{x^2 - 1} \geqslant x - \sqrt{x^2 - 1} > 0, \text{ puisque } x = \sqrt{x^2} > \sqrt{x^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Pour $x = 1$, ces deux solutions sont confondues. Et pour $x > 1$, on observe que $x - \sqrt{x^2 - 1} < 1$:

$$x - \sqrt{x^2 - 1} < 1 \iff x - 1 < \sqrt{x^2 - 1} \iff (x - 1)^2 < x^2 - 1 \iff -2x + 1 < -1 \iff x > 1.$$

D'où l'équivalence : $x = \mathrm{ch}(t) \iff t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
On en conclut que $\boxed{\mathrm{Argch} : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}$.

3

- *Première méthode.* L'expression de Argch obtenue à la question 2 fait apparaître l'expression d'une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$ par opérations algébriques et composition, et :

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ \mathrm{Argch}'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

- *Deuxième méthode.* ch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée sh ne s'annule jamais sur cet intervalle, donc d'après le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque, Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]1, +\infty[,\ \mathrm{Argch}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{Argch}(x))} \\
&= \frac{1}{\mathrm{sh}(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))} \\
&= \frac{2}{x + \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}} \\
&= \frac{2(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 - 1} \\
&= \frac{2(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2(x^2 - 1) + 2x\sqrt{x^2 - 1}} \\
&= \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} + x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.
\end{aligned}$$

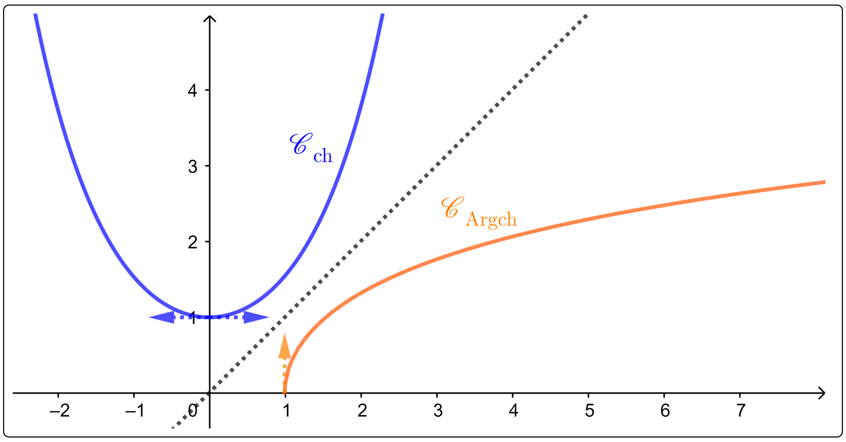
On a bien prouvé de deux manières que $\boxed{\text{Arch est dérivable sur }]1, +\infty[}$ et $\boxed{\forall x \in]1, +\infty[,\ \mathrm{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$.

4

La tangente horizontale que possède $\mathscr{C}_{\text{ch}}$ en $(0,1)$ implique une tangente verticale pour $\mathscr{C}_{\text{Argch}}$ en $(1,0)$.
Donc $\boxed{\text{Argch n'est pas dérivable en } 1}$.

5

Voici le graphe des courbes représentatives de ch et Argch.



EXERCICE 2

1. On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{n-2k}{k(n-k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{n-k}$.
   Or : $\frac{n-2k}{k(n-k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{n-k} \iff \frac{n-2k}{k(n-k)} = \frac{a(n-k)+bk}{k(n-k)} \iff n - 2k = an + (b-a)k$.
   Il suffit donc de choisir (a,b) vérifiant le système : $\begin{cases} n = an \\ -2 = b - a \end{cases}$. $(a,b) = (1,-1)$ convient clairement.

2. D'après la question précédente : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{n-2k}{k(n-k)} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n-k}\right)$.
   Par linéarité et changement d'indice : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{n-2k}{k(n-k)} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum\limits_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h} = 0$.

EXERCICE 3 - FACULTATIF

1.a

Comme sin est à valeurs dans $[-1;1]$, on a $\boxed{\sin^2(a)+\sin^2(b)\leqslant 2}$.
Dès lors que $b=\pi-a$, $\sin^2(a)+\sin^2(b)=2\sin^2(a)$, donc

$$\sin^2(a)+\sin^2(b)=2 \iff \sin^2(a)=1 \iff \sin(a)=\pm 1 \iff a\equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

Or $a\in[0;\pi]$, d'où $\boxed{\sin^2(a)+\sin^2(b)=2 \iff a=b=\frac{\pi}{2}}$.

1.b.i

Pour cette question et les suivantes, on importe la fonction `sin` et la constante pi Python de la façon suivante :

Code Python
```
from math import sin,pi
```

Voici alors une fonction `somme` :

Code Python
```
def somme(a,b):
    return (sin(a))**2+(sin(b))**2
```

1.b.ii

Comme π n'est pas un multiple de $p=0,05$, les valeurs successives que l'on va passer en revue seront :

$$(0,\pi),\ (p,\pi-p),\ \dots,\left(\left\lfloor\frac{\pi}{p}\right\rfloor p,\pi-\left\lfloor\frac{\pi}{p}\right\rfloor p\right),$$

le plus grand multiple de p inférieur ou égal à π étant $\left\lfloor\frac{\pi}{p}\right\rfloor p$. Une possibilité de fonction `maxi` est alors :

Code Python
```
def maxi():
    p = 0.05
    n = int(pi/p)
    s = somme(0,pi)
    for k in range(1,n+1):
        if somme(k*p,pi-k*p)>s:
            s = somme(k*p,pi-k*p)
    return s
```

L'instruction `maxi()` renvoie `1.9991351502732795`.

1.b.iii

On peut seulement passer en revue $\boxed{\text{la première moitié de ces couples}}$ par symétrie des rôles de a et b.

1.b.iv

Voici une fonction adaptée de celle écrite en 1.b.ii :

Code Python
```
def maxi2(p):
    n = int(pi/p)//2
    s = somme(0,pi)
    for k in range(1,n+1):
        if somme(k*p,pi-k*p)>s:
            s = somme(k*p,pi-k*p)
    return s
```

On peut alors appliquer cette fonction avec diverses valeurs d'entrée :

- `maxi2(pi/100)` renvoie `1.9980267284282718`;
- `maxi2(pi/1000)` renvoie `1.9999802608561372`;
- `maxi2(pi/10000)` renvoie `2.0`.

2.a

On écrit :

$$\begin{aligned} S &= 1-\cos^2(a)+\sin^2(b)+\sin^2(c) \quad \text{car } \cos^2(a)+\sin^2(a)=1,\\ &= 1-\cos^2(a)+\frac{1-\cos(2b)}{2}+\frac{1-\cos(2c)}{2} \quad \text{car } \forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(2\theta)=1-2\sin^2(\theta),\\ &= 2-\cos^2(a)-\frac{\cos(2b)+\cos(2c)}{2}\\ &= 2-\cos^2(a)-\cos(b+c)\cos(b-c) \quad \text{car } \forall p,q\in\mathbb{R},\ \cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right). \end{aligned}$$

La relation $b+c=\pi-a$ permet d'écrire $\cos(b+c)=\cos(\pi-a)=-\cos(a)$ donc

$$\boxed{S=-\cos^2(a)+\cos(b-c)\cos(a)+2}\,.$$

2.b

En posant $X=\cos(a)$, on observe que $S=-X^2+\cos(b-c)X+2=-\left(X-\frac{\cos(b-c)}{2}\right)^2+\frac{\cos^2(b-c)}{4}+2$. S atteint son maximum lorsque $X=\frac{\cos(b-c)}{2}$ et ce maximum vaut $\frac{\cos^2(b-c)}{4}+2$. Cette dernière quantité est inférieure ou égale à $\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$, donc $\boxed{S\leqslant\frac{9}{4}}$, et elle vaut $\frac{9}{4}$ si, et seulement si, $\cos^2(b-c)=1$ (et, bien sûr, $X=\cos(a)=\frac{\cos(b-c)}{2}$). Or, $\cos^2(b-c)=1 \iff b-c\equiv 0[\pi] \iff b=c$ car $b,c\in[0;\pi]$. Finalement,

$$S=\frac{9}{4} \iff b=c \text{ et } \cos(a)=\frac{1}{2} \iff b=c \text{ et } a=\frac{\pi}{3}$$

En injectant dans $a+b+c=\pi$, il vient $a=b=c=\frac{\pi}{3}$. Ainsi $\boxed{S=\frac{9}{4} \text{ si, et seulement si, } a=b=c=\frac{\pi}{3}}$.

3.a

On calcule les valeurs (notées `s` dans l'algorithme ci-dessous) de $S=\sin^2(a)+\sin^2(b)+\sin^2(c)+\sin^2(d)$ pour a,b,c variant entre 0 et π avec un pas donné et $d=2\pi-a-b-c$. Ensuite, on sélectionne la plus grande des valeurs obtenues, et on retient les valeurs de a,b,c,d qui ont conduit à ce résultat.

Code Python

```python
from math import sin,pi
a = 0
S = 0
pas = 0.05
while a<pi:
    b = 0
    while a+b<2*pi:
        c = 0
        while a+b+c<2*pi:
            d = 2*pi-a-b-c
            s = sin(a)**2+sin(b)**2+sin(c)**2+sin(d)**2
            if s>S:
                S = s
                A,B,C,D = a,b,c,d
            c += pas
        b += pas
    a += pas
print(S,A,B,C,D)
```

Lors de l'exécution de ce script, Python affiche :

Code Python

```
3.9981290591882597 1.5500000000000007 1.5500000000000007 1.6000000000000008 1.583185307179584
```

3.b

La question 3.a semble annoncer que la valeur de S maximale est 4 et qu'on l'obtient pour $a=b=c=d=\frac{\pi}{2}$. Comme sin est à valeurs dans $[-1;1]$, on a clairement $S\leqslant 4$. De plus, lorsque $a=b=c=d=\frac{\pi}{2}$, $S=4$. Cela justifie que $\boxed{\text{la plus grande valeur de } S \text{ est 4, obtenue pour } a=b=c=d=\frac{\pi}{2}}$.

★ ★ ★