MATH

Devoir à la maison n°2

Un corrigé

EXERCICE 1

1

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$. Si $x = 1$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = n+1}$.

2

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est un polynôme, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
Par ailleurs, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est également dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x^2)} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

On en conclut que, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} kx^k = x\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}}$.

Enfin, si $x = 1$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

3.a

On note que, pour $x = 2$, le résultat de la question précédente se réécrit : $\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2(1-(n+1)2^n + n2^{n+1}) = 2+(n-1)2^{n+1}$.
Par changement d'indice :

$$\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k = \sum_{p=1}^{i+1} p2^{p-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{i+1} p2^p = 1 + i2^{i+1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k\right) &= \sum_{i=0}^{n}\left(1+i2^{i+1}\right) \\
&= n+1+2(2+(n-1)2^{n+1}) \\
&= (n-1)2^{n+2}+n+5.
\end{aligned}$$

Pour résumer, $\boxed{\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k\right) = (n-1)2^{n+2}+n+5}$.

3.b

En permutant les symboles de sommation :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k\right) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}(k+1)2^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k\sum_{i=k}^{n}1 \\
&= \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)(k+1)2^k \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k - \sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k \\
&= (n+1)(n2^{n+1}+1) - \sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k.
\end{aligned}$$

Selon la question 3.a, on en déduit : $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)2^k = (n+1)\left(n2^{n+1}+1\right) - \left((n-1)2^{n+2}+n+5\right)$.

Après simplifications, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k(k+1)2^k = (n^2-n+2)2^{n+1}-4}$.

3.c

Par linéarité, $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)2^k = \sum_{k=0}^{n} k^2 2^k + \sum_{k=0}^{n} k2^k$. D'où l'on déduit $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k = (n^2-2n+3)2^{n+1}-6}$.

★ ★ ★