MATH

Devoir à la Maison n°11

MPSI 9/05/2025

EXERCICE

I - Étude d'une loi discrète

Soit n un entier naturel non nul.

1. Déterminer la constante réelle c telle que les propriétés suivantes :
$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = k) = c \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
définissent une variable aléatoire.
Désormais, X est une variable aléatoire suivant la loi ainsi définie, et l'on écrira $X \sim \mathscr{F}(n)$.
2. On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
   (a) Montrer que $u_n = n \ln(n+1) - \ln(n!)$.
   (b) À l'aide de la formule de Stirling, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, et en déduire un équivalent simple de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II - Loi du premier chiffre significatif

Pour $a \in]0, +\infty[$, on note $\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)}$.
En Syldavie, le nombre d'habitants X d'une ville tirée au hasard suit la loi $\mathscr{F}(999\,999)$.

1. Donner une valeur approchée de la population moyenne des villes de Syldavie.
2. On appelle *premier chiffre significatif* d'un nombre non nul le premier chiffre non nul de son écriture décimale.
Ainsi, le premier chiffre significatif de 1729 est 1.
On note Y le premier chiffre significatif de X.
Justifier que $(Y = 1) = \bigcup\limits_{k=0}^{5} (10^k \leqslant X \leqslant 2 \cdot 10^k - 1)$ et en déduire $\mathbb{P}(Y = 1)$.
3. Montrer que Y suit la loi $\mathscr{F}(9)$ et calculer $\mathbb{E}(Y)$.