MATH

Devoir à la maison n°11

Un corrigé

EXERCICE

I.1

Il s'agit de vérifier les deux points suivants :

- $\forall k \in [\![1\,,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) \geqslant 0$, ce qui est immédiat dès lors que $c \geqslant 0$.
- $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)$ existe et vaut 1. Cette somme est finie, donc elle existe, et par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = c\sum_{k=1}^{n}[\ln(n+1)-\ln(n)] = c\ln(n+1).$$

Cette somme vaut 1 si et seulement si $c = \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Ainsi, $\boxed{X \text{ est une variable aléatoire si et seulement si } c = \frac{1}{\ln(n+1)}}$.

I.2.(a)

On écrit successivement :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} k[\ln(k+1)-\ln(k)] \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k\ln(k) \quad \text{par linéarité,} \\ &= \sum_{h=2}^{n+1}(h-1)\ln(h) - \sum_{k=1}^{n} k\ln(k) \quad \text{en posant } h=k+1, \\ &= \sum_{h=2}^{n+1} h\ln(h) - \sum_{h=2}^{n+1}\ln(h) - \sum_{k=1}^{n} k\ln(k) \quad \text{par linéarité,} \\ &= (n+1)\ln(n+1) - \sum_{h=2}^{n+1}\ln(h) \quad \text{par télescopage.} \end{aligned}$$

On en déduit $\boxed{u_n = n\ln(n+1) - \ln(n!)}$.

I.2.(b)

On cherche à montrer que $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Or, $\frac{u_n}{n} = \ln(n+1) - \frac{1}{n}\ln(n!) = \ln\left(\frac{n+1}{n!^{1/n}}\right)$. Il suffit donc de montrer que $\frac{n+1}{n!^{1/n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

- D'une part, $n!^{1/n} \sim \sqrt{2\pi n}^{1/n}\frac{n}{\mathrm{e}}$. En effet :

$$\begin{aligned} n!^{\frac{1}{n}} &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(n!)} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left((1+\varepsilon_n)\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\right)} \quad \text{en notant } 1+\varepsilon_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}} \to 1 \text{ selon la formule de Stirling,} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\right)}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(1+\varepsilon_n)} \\ &\sim \sqrt{2\pi n}^{1/n}\frac{n}{\mathrm{e}} \qquad \text{car } \frac{1}{n}\ln(1+\varepsilon_n) \sim \frac{\varepsilon_n}{n} \to 0 \text{ donc } \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(1+\varepsilon_n)} \to \mathrm{e}^0 = 1. \end{aligned}$$

- On en déduit que $\frac{n+1}{n!^{1/n}} \sim \mathrm{e}\,\frac{n+1}{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}^{1/n}}$.

Par ailleurs, $\sqrt{2\pi n}^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\ln(\sqrt{2\pi n})) \to 1$ car $\frac{1}{n}\ln(\sqrt{2\pi n}) \to 0$ par croissances comparées.
D'où $\frac{n+1}{n!^{1/n}} \to \mathrm{e}$, puis, par continuité de la fonction ln, $\frac{u_n}{n} \to 1$: $\boxed{u_n \sim n}$.
Immédiatement, $\boxed{\mathbb{E}(X) = cu_n \sim \frac{n}{\ln(n+1)} \sim \frac{n}{\ln(n)}}$.

II.1

Selon I.2(b), $\mathbb{E}(X) \approx \frac{999\ 999}{\ln(999\ 999)}$. $\boxed{\text{La population moyenne des villes de Syldavie est } \mathbb{E}(X) \approx 72\ 000 \text{ hab.}}$.

II.2

On note B_k l'événement « le nombre de chiffres de l'écriture décimale de X est k ».

On a clairement $(Y=1)=\bigcup_{k=0}^{5}(Y=1)\cap B_{k+1}$, ce qui devient $\boxed{(Y=1)=\bigcup_{k=0}^{5}(10^k\leqslant X\leqslant 2\cdot 10^k-1)}$.

On en déduit, par incompatibilité, $\mathbb{P}(Y=1)=\sum_{k=0}^{5}\mathbb{P}(10^k\leqslant X\leqslant 2\cdot 10^k-1)=\sum_{k=0}^{5}\sum_{i=10^k}^{2\cdot 10^k-1}\mathbb{P}(X=i)$. Or, la technique de télescopage de la question I.1 entraîne facilement :

$$\sum_{i=10^k}^{2\cdot 10^k-1}\mathbb{P}(X=i)=c(\ln(2\cdot 10^k)-\ln(10^k))=c\ln(2).$$

Ainsi $\mathbb{P}(Y=1)=6c\ln(2)$. Avec $c=\frac{1}{\ln(10^6)}=\frac{1}{6\ln(10)}$, $\boxed{\mathbb{P}(Y=1)=\log(2)}$.

II.3

On calcule de même, pour tout $k\in[\![1\,,9]\!]$, $\mathbb{P}(Y=k)=\log\left(\frac{k+1}{k}\right)$. Ainsi $\boxed{Y\sim\mathscr{F}(9)}$.

Selon I.2.(a), $\mathbb{E}(Y)=cu_n=\frac{1}{10}(9\ln(10)-\ln(9!))$, c'est-à-dire $\boxed{\mathbb{E}(Y)=9-\log(9!)\approx 3,4}$.

★ ★ ★