

## Préambule

Objectifs : être à jour à la rentrée des vacances de Pâques.

## Chapitres 21, 22, 23, 24

*REVISIONS.* Les chapitres 17, 18, 19 sont sous-jacents dans ces chapitres...

**COURS.** Réviser son cours. Énoncer précisément les points du cours associés.  $\rightsquigarrow$  prendre les programmes de colle associés.

**SAVOIR-FAIRE.** Connaître sur le bout des doigts tous les exemples ♥.

**EXERCICES.** Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

## Chapitre 25

*REVISIONS.* Les chapitres 7, 12, 13, 14, 15 sont sous-jacents dans ce chapitre...

*REVISIONS.* Les chapitres 21, 22, 23, 24 sont également sous-jacents dans ce chapitre ; ça fait deux raisons de les reprendre...

**COURS.** Réviser son cours. Énoncer précisément les points du cours associés.  $\rightsquigarrow$  prendre les programmes de colle associés.

**SAVOIR-FAIRE.** Connaître sur le bout des doigts tous les exemples ♥.

**EXERCICES.** Refaire tous les exercices ♥ par ordre de difficulté. Faire les autres si le temps le permet.

## EXERCICE 1

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

1. Montrer que  $f$  est une fonction paire.
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et exprimer  $f'(x)$  pour  $x \neq 0$ . Étudier les variations de  $f$ .
3. Prouver que :

$$\forall x > 0, \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2x}.$$

En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

4. On considère la fonction  $u$  définie par :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t) - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- (a) Prouver que  $u$  est impaire.
- (b) Montrer que  $u$  est continue en 0.
- (c) Démontrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} u(t) dt = 0.$$

- (d) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(2)$ .
- (e) Prouver que le prolongement par continuité  $\hat{f}$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est dérivable en 0 et calculer  $\hat{f}'(0)$ .