MATH

Devoir à la Maison n°1

MPSI 17/09/2024

Préambule

Vous apporterez le plus grand soin à la rigueur et à la rédaction de vos réponses.

EXERCICE 1

Soient A, B, X trois parties d'un ensemble E.

1. Supposons que l'on ait l'hypothèse $\mathcal{H}$: $A \cap X = B \cap X$. A-t-on nécessairement $A = B$?
2. Reprendre la question 1 avec $\mathcal{H}$: $A \cup X = B \cup X$.
3. Reprendre la question 1 avec $\mathcal{H}$: $A \cap X = B \cap X$ et $A \cup X = B \cup X$.
4. Reprendre la question 1 avec $\mathcal{H}$: $(A \cup X)\backslash(A \cap X) = (B \cup X)\backslash(B \cap X)$.

EXERCICE 2

L'objectif de cet exercice est de montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, le nombre :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

n'est pas entier. Pour cela, on va démontrer une proposition plus forte, à savoir que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\exists (i_n, p_n) \in I \times P,\ H_n = \frac{i_n}{p_n} \qquad (\mathcal{P}_n)$$

où I (respectivement P) désigne l'ensemble des entiers impairs (respectivement pairs).

1. Vérifier que $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ sont vraies.
2. Soit n un entier naturel impair : on l'écrit $n = 2p - 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}_p$ est vraie. Par ailleurs, on définit la somme :
$$S_p = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p-1}.$$
   (a) Vérifier que $H_{n+1} = \dfrac{1}{2} H_p + S_p$.
   (b) Justifier qu'il existe $P, Q \in \mathbb{N}$ tels que $S_p = \dfrac{P}{2Q+1}$.
   (c) En déduire que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est satisfaite.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence forte que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$ et conclure quant au problème initial.